共立叢書
現代数学の潮流

リー代数と量子群

谷崎　俊之　著

共立出版株式会社

共立叢書
現代数学の潮流

リー代数と量子群

谷崎　俊之　著

共立出版株式会社

刊行にあたって

数学には，永い年月変わらない部分と，進歩と発展に伴って次々にその形を変化させていく部分とがある．これは，歴史と伝統に支えられている一方で現在も進化し続けている数学という学問の特質である．また，自然科学はもとより幅広い分野の基礎としての重要性を増していることは，現代における数学の特徴の一つである．

「21 世紀の数学」シリーズでは，新しいが変わらない数学の基礎を提供した．これに引き続き，今を活きている数学の諸相を本の形で世に出したい．「共立講座　現代の数学」から 30 年．21 世紀初頭の数学の姿を描くために，私達はこのシリーズを企画した．

これから順次出版されるものは，伝統に支えられた分野，新しい問題意識に支えられたテーマ，いずれにしても，現代の数学の潮流を表す題材であろう，と自負する．学部学生，大学院生はもとより，研究者を始めとする数学や数理科学に関わる多くの人々にとり，指針となれば幸いである．

編集委員

はしがき

S. リーに始まるリー群およびリー代数の理論は，既に百数十年にわたる歴史をもつ．

リー代数の理論のなかでも最も魅惑的な対象の1つとして，複素数体上の有限次元半単純リー代数があるが，その分類は W. キリング，E. カルタンによりなされ，またその有限次元表現論は，カルタンによる既約表現の分類および H. ワイルによる既約指標の決定と完全可約性定理の証明により，1930年頃までには完成された．その後，解析的手法も交えた無限次元表現の研究が開始され，特にハリシュ・チャンドラや R. ラングランズなどによる重要な研究を契機として，20世紀後半からは多くの研究者が参加し，現在まで続く大きな流れとなった．

一方，これとは一応別の流れとして，1960年代後半に V. カッツと R. ムーディにより独立に導入された無限次元リー代数の理論がある．すなわち，有限次元半単純リー代数の自然な拡張としての，カッツ・ムーディ・リー代数の理論である．当初は，これを孤立した1つの話題と見るむきもあったようであるが，ミステリアスだと思われていたマクドナルド恒等式の意味づけが，カッツ・ムーディ・リー代数のうちの重要なクラスであるアフィン・リー代数の表現論を用いてなされる等の事件を通じて，徐々にその重要性が認識されるようになった．特に，伊達悦朗・神保道夫・柏原正樹・三輪哲二によるソリトン型方程式の研究にみられるように，アフィン・リー代数が無限可積分系の無限小変換群として捉えられるようになって以後は，数理物理学の研究者をも巻き込んだ大きな流れとなって，こちらも現在まで続いている．

また，1980年代中頃に，それまでリー代数を用いて研究されていた数理物理のモデルに関して，その量子化を考察する過程で，リー代数の量子化とも呼ぶことのできる「リー代数もどき」がその姿を現した．これが，V. ドリンフェル

トと神保による量子群である．それ以後現在に至るまで，数理物理学と表現論の双方の分野における多くの研究者が，量子群の研究を行ってきている．

現在では，数理物理学等における基本的な言葉としてのカッツ・ムーディ・リー代数（特にアフィン・リー代数）およびその量子群の役割は，確立されたものとなっていると言えるであろう．

また，このような応用方面での研究のみならず，表現論自身の中でも，カッツ・ムーディ・リー代数や量子群を用いた新たな視点の導入により，目覚ましい成果が得られつつある．特に，柏原と G. ルスティックによる量子群の表現空間の基底の理論とそれを用いた表現論の進展や，アフィン・リー代数の表現・1のベキ根での有限型量子群の表現・正標数での簡約代数群の有理表現の三位一体に関するルスティック・プログラムの解決（柏原・谷崎，D. カジュダン・ルスティック，H. アンデルセン・J. ヤンツェン・W. ゾルゲル），およびルスティックや中島啓らによる箙多様体の幾何を用いた量子群の表現の研究をあげることができる．

このような流れを踏まえて，本書では，カッツ・ムーディ・リー代数およびその量子群の理論の基礎的部分に関して完全に self-contained な解説を行うとともに，関連するさまざまな先端的話題に関しても，そのエッセンスを取り上げて（self-contained ではない）簡単な説明を加える．関連する書物は既に多く存在し，特にカッツ・ムーディ・リー代数に関しては，創始者自身による定番ともいえる教科書 Kac[22] があるので，新たな解説書を加える意義は少ないかもしれないが，有限次元半単純リー代数等に関する予備知識は一切なくても，カッツ・ムーディ・リー代数と量子群について学ぶことができるということは，本書の1つの利点ではないかと思う．

この分野に関する基本的知識を得て先端的な研究に触れるのに，本書が少しでも役立てば幸いである．

なお，本書の構想を練る段階で，柏原正樹，山根宏之の両氏との議論が役立った．また，紙田敦史氏には草稿を通読してもらい，多くの誤りの指摘をいただいた．以上の諸氏に感謝する．

2001年9月　北京にて

谷崎俊之

目　次

1

リー代数の基礎概念

この章では，リー代数の定義から始めて，その包絡代数や表現に関する基本事項について述べる．例を多く取り入れたので，読者はあまり苦労せずに新しい概念を吸収できるのではないかと期待している．多くの部分は，本書全体で用いられる言葉の説明であるが，実質的な内容をもつ部分としては，包絡代数に関するポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理とリー代数 $\mathfrak{sl}_2$ の表現論があり，いずれも後続の章で重要な役割を演ずることになる．

1. リー代数

まずリー代数の定義を述べよう．

1.1［定義］ 体 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上に積

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad ((x, y) \mapsto [x, y])$$

が与えられていて，以下の条件 (i)，(ii)，(iii) が成立しているとき，$\mathfrak{g}$ を $\mathbf{K}$ 上の**リー代数**（Lie algebra）と呼ぶ：

(i) （双線形性） 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g} \ni y \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$ および $\mathfrak{g} \ni y \mapsto [y, x] \in \mathfrak{g}$ はともに線形写像．

(ii) 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$[x, x] = 0$.

(iii) （**ヤコビ恒等式**，Jacobi identity） 任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対して，

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

また $[\,,\,]$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の**ブラケット積**（bracket product）と呼ぶ．

1.2［注意］　条件 (i)，(ii) を用いると

$$[x,y]+[y,x]=[x+y,x+y]-[x,x]-[y,y]=0$$

により

(ii)$'$ 任意の $x,y\in\mathfrak{g}$ に対して，$[x,y]=-[y,x]$

が成り立つことがわかる．また (ii)$'$ において $y=x$ とすると $2[x,x]=0$ となるので，基礎体 $\mathbf{K}$ の標数が 2 でなければ，条件 (ii) は (ii)$'$ で置き換えてもよい．

リー代数の例をいくつか述べよう．まずは自明な例から．

1.3［例］　ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ 上のブラケット積を，任意の $x,y\in\mathfrak{g}$ に対して $[x,y]=0$ として定めるとき，$\mathfrak{g}$ はリー代数になる．このようなリー代数を**可換リー代数**（commutative Lie algebra）と呼ぶ．　□

$\{e_i\}_{i\in I}$ を基底とするベクトル空間 $\mathfrak{g}$ がリー代数となるように，ブラケット積を定めることを考える．ブラケット積は双線形なので，$[e_i,e_j]\,(i,j\in I)$ を定めれば，一般の $x,y\in\mathfrak{g}$ に対する $[x,y]$ が一意的に定まる．また $[e_i,e_i]=0$, $[e_i,e_j]=-[e_j,e_i]$ なので，相異なる $i,j\in I$ に対して $[e_i,e_j],[e_j,e_i]$ のどちらか一方を定めればよい．いま双線形写像 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\ni(x,y)\mapsto[x,y]\in\mathfrak{g}$ であって $[e_i,e_i]=0$, $[e_i,e_j]=-[e_j,e_i]\,(i\neq j)$ を満たすものが定まっているとする．このとき $x=\sum_{i\in I}c_ie_i\,(c_i\in\mathbf{K})$ に対して，

$$[x,x]=\sum_{i\in I}c_i^2[e_i,e_i]+\sum_{\{i,j\}\subset I,i\neq j}c_ic_j([e_i,e_j]+[e_j,e_i])=0$$

となるので，$\mathfrak{g}$ がリー代数になるには，ヤコビ恒等式が成り立っていればよいが，ブラケット積の双線形性から，

$$[e_i,[e_j,e_k]]+[e_j,[e_k,e_i]]+[e_k,[e_i,e_j]]=0\qquad(i,j,k\in I)\tag{1.1}$$

が成り立つかどうかだけが問題である．$i=j=k$ ならば (1.1) は明らか．$j=k$ のときも

$$[e_i,[e_j,e_j]]+[e_j,[e_j,e_i]]+[e_j,[e_i,e_j]]=0+[e_j,[e_j,e_i]]-[e_j,[e_j,e_i]]=0$$

なので，(1.1) は自動的に成立している．したがって $i, j, k \in I$ が互いに異なっている場合に (1.1) が成立していれば，このブラケット積により $\mathfrak{g}$ はリー代数となる．

1.4 [例]　$\{h, e\}$ を基底とする 2 次元ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ はブラケット積 $[h, e] = e$ によりリー代数となる．　□

次の例を述べる前に，結合代数の定義を復習しておこう．

1.5 [定義]　体 $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間 A において，$\mathbf{K}$ 上双線形な積 $A \times A \to A$ が与えられており，この積とベクトル空間の演算としての足し算により，A が (可換とは限らない) 環になっているとき，A を体 $\mathbf{K}$ 上の**結合代数** (associative algebra) と呼ぶ[1]．また，体 $\mathbf{K}$ 上の結合代数 A, A' があるとき，写像 $f : A \to A'$ であって，線形写像でかつ環の準同型写像になっているものを，結合代数の準同型写像と呼ぶ．

例えば，

$$M_n(\mathbf{K}) = \{\mathbf{K} \text{ の元を成分とする } n \text{ 次正方行列}\}$$

は，$\mathbf{K}$ 上 n^2 次元のベクトル空間であるが，行列の積により結合代数になっている．

以下基礎体 $\mathbf{K}$ を 1 つ固定し，リー代数，ベクトル空間，結合代数などは，すべて体 $\mathbf{K}$ 上定義されているものとする．なお，第 2 章以降では $\mathbf{K}$ の標数は 0 であると仮定するが，本章に限り $\mathbf{K}$ の標数に関する仮定は特に設けない．

1.6 [例]　A を結合代数とする．A 上のブラケット積を，

$$[x, y] = xy - yx \qquad (x, y \in A)$$

により定めるとき，A はリー代数になる．ヤコビ恒等式を確かめるのがやや面倒であるが，読者は自分で手を動かして確かめられよ．　□

結合代数 A がリー代数として (例 1.3 の意味で) 可換になるための必要十分条件は，A が環として可換環であることである．

---

[1] 本書では，環は乗法に関する単位元 1 を含み，環の準同型写像は単位元を単位元に移すものとする．

1.7 [例]　$M_n(\mathbf{K})$ は結合代数なので，自然にリー代数になる．$M_n(\mathbf{K})$ をリー代数と思うときは，これを $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ と書く[2]．□

1.8 [例]　Λ を添え字集合として，$\{c, a_\lambda, b_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ を基底とするベクトル空間 $\mathfrak{g}$ を考える．このとき $\mathfrak{g}$ 上のリー代数の構造が，次で一意的に定まる[3]：

$$[c, a_\lambda] = [c, b_\lambda] = 0 \qquad (\lambda \in \Lambda),$$
$$[a_\lambda, a_\mu] = [b_\lambda, b_\mu] = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda),$$
$$[a_\lambda, b_\mu] = \delta_{\lambda,\mu} c \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda).$$

この $\mathfrak{g}$ を**ハイゼンベルグ代数**（Heisenberg algebra）と呼ぶ．□

1.9 [例]　$\{c, L(n) | n \in \mathbf{Z}\}$ を基底とするベクトル空間 $\mathfrak{g}$ を考える．このとき $\mathfrak{g}$ 上のリー代数の構造が，次で一意的に定まる

$$[c, L(n)] = 0 \qquad (n \in \mathbf{Z}),$$
$$[L(n), L(m)] = (n-m)L(m+n) + \delta_{n+m,0}\frac{n^3 - n}{12}c$$

この $\mathfrak{g}$ を**ヴィラソロ代数**（Virasoro algebra）と呼ぶ．これを Vir と書くこともある．□

リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が，ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の部分空間で，しかも

$$x, y \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad [x, y] \in \mathfrak{h} \tag{1.2}$$

を満たすとき，$\mathfrak{h}$ はそれ自身自然にリー代数になる．このような $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の**部分リー代数**（Lie subalgebra），あるいは単に**部分代数**（subalgebra）と呼ぶ．

1.10 [例]　以下はすべて $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ の部分リー代数である（したがって特にリー代数である）：

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbf{K}) = \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K}) | \operatorname{Tr}(a) = 0\},$$
$$\mathfrak{o}_n(\mathbf{K}) = \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K}) | {}^t a + a = 0\},$$
$$\mathfrak{sp}_{2m}(\mathbf{K}) = \{a \in \mathfrak{gl}_{2m}(\mathbf{K}) | {}^t aJ + Ja = 0\} \quad (n = 2m).$$

[2] $\mathbf{K}$ が実数体 $\mathbf{R}$ のとき，$\mathfrak{gl}_n(\mathbf{R})$ はリー群 $GL_n(\mathbf{R})$（一般線形群）のリー代数である．$\mathfrak{gl}_n$ という記法は，リー群に対応するリー代数をドイツ文字で表す習慣からきている．

[3] $\delta_{\lambda,\mu}$ はクロネッカーのデルタである．すなわち，$\lambda = \mu$ のとき $\delta_{\lambda,\mu} = 1$，それ以外のとき $\delta_{\lambda,\mu} = 0$.

ただし $a=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ に対して

$$\mathrm{Tr}(a)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

また

$$J=\begin{pmatrix}0 & -E_m\\ E_m & 0\end{pmatrix}\qquad (E_m \text{ は } m \text{ 次単位行列}).$$

□

1.11 [例]　以下もすべて $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ の部分リー代数である：

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_n(\mathbf{K})&=\{a=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})|a_{ij}=0\quad(i>j)\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}* & * & \cdots & * & *\\ 0 & * & \cdots & * & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & * & *\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & *\end{pmatrix}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_n(\mathbf{K})&=\{a=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})|a_{ij}=0\quad(i\geqq j)\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}0 & * & \cdots & * & *\\ 0 & 0 & \cdots & * & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & *\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_n(\mathbf{K})&=\{a=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})|a_{ij}=0\quad(i\neq j)\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}* & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & * & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & * & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & *\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

□

リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 Γ に対して，$\mathfrak{g}$ の部分リー代数であって Γ を含むもののうちで最小のものを，Γ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数と呼ぶ．これは，Γ を含む部分リー代数すべての交わりとして得られるが，次のようにより具体的に書くこともできる．

1.12 [補題]　リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 Γ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数は，

$$[a_1, [a_2, [a_3, \ldots, [a_{r-1}, a_r] \cdots] \qquad (1 \leqq r < \infty,\ a_i \in \Gamma)$$

の形の元の線形結合の全体からなる．

証明　簡単のために

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r] = [a_1, [a_2, \ldots, [a_{r-1}, a_r] \cdots]$$

なる記法を用いる．$[a_1, \ldots, a_r]\,(a_i \in \Gamma)$ の形の元の線形結合の全体を $\mathfrak{k}$，Γ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数を $\mathfrak{h}$ とする．$a_1, \ldots, a_r \in \Gamma$ とすると，$a_i \in \mathfrak{h}$ であるが，$\mathfrak{h}$ は部分リー代数なので，$[a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r] \in \mathfrak{h}$．よって $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$．$\Gamma \subset \mathfrak{k}$ は明らかなので，$\mathfrak{k}$ が部分リー代数であることを示せばよい．それには

$$[[a_1, \ldots, a_r], [b_1, \ldots, b_s]] \in \mathfrak{k} \qquad (a_i, b_j \in \Gamma)$$

を示せばよい．r に関する帰納法を用いる．$\mathfrak{k}$ の定義により $[\Gamma, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ なので，$r = 1$ のときは明らか．$r \geqq 2$ のときは，ヤコビ恒等式により，

$$\begin{aligned}
&[[a_1, \ldots, a_r], [b_1, \ldots, b_s]] \\
=&[[a_1, [a_2, \ldots, a_r]], [b_1, \ldots, b_s]] \\
=&-[[[a_2, \ldots, a_r], [b_1, \ldots, b_s]], a_1] - [[[b_1, \ldots, b_s], a_1], [a_2, \ldots, a_r]] \\
=&[a_1, [[a_2, \ldots, a_r], [b_1, \ldots, b_s]]] - [[a_2, \ldots, a_r], [a_1, b_1, \ldots, b_s]]
\end{aligned}$$

であるが，帰納法の仮定と $[\Gamma, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ により

$$[a_1, [[a_2, \ldots, a_r], [b_1, \ldots, b_s]]],\ [[a_2, \ldots, a_r], [a_1, b_1, \ldots, b_s]] \in \mathfrak{k}$$

なので，$[[a_1, \ldots, a_r], [b_1, \ldots, b_s]] \in \mathfrak{k}$ がわかる．　∎

リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 Γ で生成される部分リー代数が $\mathfrak{g}$ 自身と一致するとき，$\mathfrak{g}$ は Γ で生成されるという．

リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{h}$ が

$$x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h} \quad \Longrightarrow \quad [x, y] \in \mathfrak{h} \tag{1.3}$$

を満たすとき，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の**イデアル**（ideal）と呼ぶ．$\mathfrak{g}$ 自身および $\{0\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．

1.13［例］　$\mathfrak{z} = \{a \in \mathfrak{g} | [a, x] = 0 \quad (x \in \mathfrak{g})\}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルになる．この $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{g}$ の**中心**（center）という．□

1.14［例］　$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ に対して

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] = \{\sum_i [h_i, k_i] \ (\text{有限和}) | h_i \in \mathfrak{h}, k_i \in \mathfrak{k}\}$$

は $\mathfrak{g}$ のイデアルである．□

1.15［問題］　以下の $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{h}$ に関して，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであることを示せ．

(i) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K}), \mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{K})$.

(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_n(\mathbf{K}), \mathfrak{h} = \mathfrak{n}_n(\mathbf{K})$（記号は，例 1.11 に従う）．

リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 Γ に対して，$\mathfrak{g}$ のイデアルであって Γ を含むもののうちで最小のものを，Γ で生成される $\mathfrak{g}$ のイデアルと呼ぶ．これは Γ を含むイデアルすべての交わりとして得られる．次は明らかであろう．

1.16［補題］　リー代数 $\mathfrak{g}$ の部分集合 Γ で生成される $\mathfrak{g}$ のイデアルは，

$$[a_1, [a_2, [a_3, \ldots, [a_r, b] \cdots] \qquad (1 \leqq r < \infty, \ a_i \in \mathfrak{g}, \ b \in \Gamma)$$

の形の元の線形結合の全体からなる．

$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ のイデアルとする．このとき商ベクトル空間

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{\overline{x} | x \in \mathfrak{g}\}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \overline{x}=\overline{y} \Longleftrightarrow x-y\in\mathfrak{h} & (x,y\in\mathfrak{g}) \\ \overline{x}+\overline{y}:=\overline{x+y} & (x,y\in\mathfrak{g}) \\ c\overline{x}:=\overline{cx} & (x\in\mathfrak{g}, c\in\mathbf{K}) \end{array}\right)$$

はブラケット積

$$[\overline{x},\overline{y}]:=\overline{[x,y]} \qquad (x,y\in\mathfrak{g}) \tag{1.4}$$

によりリー代数になる．実際，ブラケット積 (1.4) が代表元の取り方によらずに矛盾なく定まることは，イデアルの条件 (1.3) から従う．このとき，このブラケット積により $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ がリー代数になることは，$\mathfrak{g}$ がリー代数であることから明らか．このリー代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ による**商リー代数**（quotient Lie algebra）と呼ぶ．

1.17［定義］　$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ をリー代数とする．線形写像 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ であって，任意の $x,y\in\mathfrak{g}_1$ に対して $f([x,y])=[f(x),f(y)]$ を満たすもののことを，**リー代数の準同型写像**（homomorphism）と呼ぶ．またリー代数の準同型写像であってしかも全単射であるものを，**リー代数の同型写像**（isomorphism）と呼ぶ．同型写像 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ が存在するとき，$\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ は同型であるといい $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$ と書く．

$f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ をリー代数の準同型写像とするとき，その**核**（kernel）

$$\mathrm{Ker}(f)=\{a\in\mathfrak{g}_1 | f(a)=0\}$$

は $\mathfrak{g}_1$ のイデアルであり，その**像**（image）

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(a) | a\in\mathfrak{g}_1\}$$

は $\mathfrak{g}_2$ の部分リー代数であることが容易にわかる．

1.18［定理］(リー代数の準同型定理)　$f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ がリー代数の準同型写像のとき，

$$\mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(f)\cong\mathrm{Im}(f).$$

証明　ベクトル空間に関する準同型定理により，ベクトル空間の同型写像 $\overline{f}:\mathfrak{g}_1/\mathrm{Ker}(f)\to\mathrm{Im}(f)$ が，$\overline{f}(\overline{a})=f(a)$ $(a\in\mathfrak{g}_1)$ により矛盾なく定まる．また，

$a, b \in \mathfrak{g}_1$ に対して

$$\overline{f}([\overline{a}, \overline{b}]) = \overline{f}(\overline{[a, b]}) = f([a, b]) = [f(a), f(b)] = [\overline{f}(\overline{a}), \overline{f}(\overline{b})]$$

により，$\overline{f}$ はリー代数の準同型写像．よって $\overline{f}$ はリー代数の同型写像． ∎

リー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ のベクトル空間としての直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ は，ブラケット積

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\right] = \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \qquad (a_i,\ b_i \in \mathfrak{g}_i)$$

によりリー代数になる．これをリー代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ の**直和**（direct sum）と呼ぶ．

1.19［問題］　リー代数 $\mathfrak{g}$ とそのイデアル $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ があって，$\mathfrak{g}$ はベクトル空間としてその部分空間 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ の直和であるとする．このとき $\mathfrak{g}$ は上で定義したリー代数の直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$ と（リー代数として）同型であることを示せ．

2. 包絡代数

リー代数 $\mathfrak{g}$ を 1 つ決めるとき，結合代数 A とリー代数の準同型写像 $f : \mathfrak{g} \to A$ の組 (A, f)（結合代数は例 1.6 によりリー代数と見なす）の全体のうちで，標準的なものがただ 1 つ定まり，それをリー代数 $\mathfrak{g}$ の包絡代数という．正確な定式化は普遍写像性質を用いて次のようになされる．

1.20［定理］　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする．結合代数 A とリー代数の準同型写像 $f : \mathfrak{g} \to A$ の組 (A, f) であって，次の普遍写像性質を満たすものが同型を除いてただ 1 つ存在する：

（普遍写像性質）別の組 (A', f') があるとき，結合代数の準同型写像 $h : A \to A'$ であって，$f' = h \circ f$ を満たすものがただ 1 つ存在する．

この普遍的な組 (A, f) を $(U(\mathfrak{g}), \sigma)$ と書き，これを（あるいは単に $U(\mathfrak{g})$ を）リー代数 $\mathfrak{g}$ の**包絡代数**（enveloping algebra）と呼ぶ[4]．

[4] 以前は普遍包絡代数（universal enveloping algebra）と呼んだが，最近では簡単に包絡代数（enveloping algebra）というのが主流である．なお，訳語の問題であるが，包絡代数ではなく展開代数ということも多い．

以下定理 1.20 の証明を述べる．まず一意性は以下のとおり普遍写像性質に関するお決まりの議論で導かれる．普遍写像性質を満たす2つの組 $(A,f),(B,g)$ があるとする．(A,f) の普遍写像性質から，結合代数の準同型写像 $h : A \to B$ であって $g = h \circ f$ を満たすものが存在する．同様に (B,g) の普遍写像性質から，結合代数の準同型写像 $k : B \to A$ であって $f = k \circ g$ を満たすものが存在する．このとき $k \circ h = \mathrm{id}, h \circ k = \mathrm{id}$ を示せばよい．まず

$$(k \circ h) \circ f = k \circ (h \circ f) = k \circ g = f$$

に注意する．A の普遍写像性質から，結合代数の準同型写像 $q : A \to A$ であって，$q \circ f = f$ を満たすものがただ1つ存在するが，$q = \mathrm{id}, q = k \circ h$ はともに $q \circ f = f$ を満たすので，$k \circ h = \mathrm{id}$ でなければならない．また A と B を入れ替えて同様の議論を行うと $h \circ k = \mathrm{id}$ もわかる．以上により，包絡代数は存在すれば同型を除いて一意的であることがわかった．

包絡代数の存在を示すために，しばらく準備を行う．

集合 I により添え字づけられた文字の集合 $\{x_i\}_{i \in I}$ に対して，これらの文字の非可換な単項式

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_r \in I,\ 0 \leqq r < \infty)$$

を考える（$r = 0$ のときは1と書く）．ここで非可換といったのは，例えば $I = \{1,2\}$ のとき x_1 と x_2 の順序の入れ替えを許さずに $x_1 x_2 x_1$ と $x_1 x_1 x_2 = x_1^2 x_2$ は区別して別のものと考えるということである．このような非可換単項式を基底とするベクトル空間を $\mathbf{K}\langle x_i | i \in I \rangle$ で表し，その元を非可換多項式と呼ぶ．$\mathbf{K}\langle x_i | i \in I \rangle$ 上の双線形な積を

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_r})(x_{j_1} \cdots x_{j_s}) = x_{i_1} \cdots x_{i_r} x_{j_1} \cdots x_{j_s}$$

で定めるとき，これにより $\mathbf{K}\langle x_i | i \in I \rangle$ は結合代数となることが容易にわかるが，これを文字 $\{x_i\}_{i \in I}$ に関する**非可換多項式環**（non-commutative polynomial ring）と呼ぶ[5]．

一般に結合代数 A とその元の族 $\{a_i\}_{i \in I}$ が与えられたとき，非可換多項式 $F \in \mathbf{K}\langle x_i | i \in I \rangle$ の各文字 x_i に a_i を代入して得られる元を $F|_{x_i = a_i} \in A$ と書

[5] $\{x_i\}_{i \in I}$ を基底とするベクトル空間 V のテンソル代数 $T(V)$ のことである．

く（例えば，$F = x_1^2 - x_2x_3 \in \mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle$ のとき $F|_{x_i=a_i} = a_1^2 - a_2a_3 \in A$）．これにより結合代数の準同型写像 $\mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle \to A \quad (F \mapsto F|_{x_i=a_i})$ が定まる．

いま非可換多項式の族 $\{F_j\}_{j\in J} \subset \mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle$ が与えられているとする．これらで生成される $\mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle$ の両側イデアルを $\mathcal{I}$ とし，結合代数 $A = \mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle/\mathcal{I}$ を考える：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I} = \{\sum_{j\in J} G_jF_jH_j\,(\text{有限和})\,|G_j, H_j \in \mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle\},\\
&A = \{\overline{F}|F \in \mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle\}, \qquad \overline{F} = \overline{G} \Longleftrightarrow F - G \in \mathcal{I},\\
&\overline{F} + \overline{G} := \overline{F+G},\\
&\overline{F}\,\overline{G} := \overline{FG}.
\end{aligned}
$$

$a_i = \overline{x}_i$ とおくとき，各 $j \in J$ に対して $F_j|_{x_i=a_i} = \overline{F_j} = 0$ が成立している．そこで，この A を $\{a_i\}_{i\in I}$ により生成され，

$$
F_j|_{x_i=a_i} = 0 \qquad (j \in J) \tag{1.5}
$$

を**基本関係式** (fundamental relations) とする結合代数と呼ぶ．これは次の普遍写像性質で特徴づけられる．

1.21 ［命題］　$\{a_i\}_{i\in I}$ により生成され，(1.5) を基本関係式とする結合代数を，A とする．結合代数 B と B の元の族 $\{b_i\}_{i\in I}$ があって，$F_j|_{x_i=b_i} = 0\,(j \in J)$ が成立しているとする．このとき，結合代数の準同型写像 $h : A \to B$ であって $h(a_i) = b_i\,(i \in I)$ を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明　h がもし存在するとすると，$h(\overline{F}) = h(F|_{x_i=a_i}) = F|_{x_i=b_i}$ でなければならない．したがって，$h(\overline{F}) = F|_{x_i=b_i}$ とおくことにより $h : A \to B$ が矛盾なく定まり，結合代数の準同型写像になっていることを確かめればよい．$\overline{F} = \overline{G}$ とすると，$F - G \in \mathcal{I}$ なので，$\mathcal{I}$ の定義と $F_j|_{x_i=b_i} = 0\,(j \in J)$ から $F|_{x_i=b_i} - G|_{x_i=b_i} = (F - G)|_{x_i=b_i} = 0$ がわかる．したがって h は矛盾なく定まる．このとき h が結合代数の準同型写像であることは定義から明らか．∎

そこで包絡代数の存在証明に戻ろう．

$\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_i\}_{i\in I}$ を1つ選び,

$$[e_i, e_j] = \sum_{k\in I} c_{ijk} e_k \qquad (i, j \in I)$$

により構造定数 $c_{ijk} \in \mathbf{K}$ $(i, j, k \in I)$ を定める.

1.22 [補題]　$\{\tilde{e}_i\}_{i\in I}$ により生成され

$$\tilde{e}_i\tilde{e}_j - \tilde{e}_j\tilde{e}_i = \sum_{k\in I} c_{ijk}\tilde{e}_k \qquad (i, j \in I)$$

を基本関係式とする結合代数は, $\mathfrak{g}$ の包絡代数である. また $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ は $\sigma(e_i) = \tilde{e}_i$ により与えられる.

証明　$\{\tilde{e}_i\}_{i\in I}$ により生成され

$$\tilde{e}_i\tilde{e}_j - \tilde{e}_j\tilde{e}_i = \sum_{k\in I} c_{ijk}\tilde{e}_k \qquad (i, j \in I)$$

を基本関係式とする結合代数を A とし, 線形写像 $f : \mathfrak{g} \to A$ を $f(e_i) = \tilde{e}_i$ により定める. このとき

$$\begin{aligned}[f(e_i), f(e_j)] &= f(e_i)f(e_j) - f(e_j)f(e_i) = \tilde{e}_i\tilde{e}_j - \tilde{e}_j\tilde{e}_i \\ &= \sum_{k\in I} c_{ijk}\tilde{e}_k = \sum_{k\in I} c_{ijk} f(e_k) = f([e_i, e_j])\end{aligned}$$

により f はリー代数の準同型写像である. この (A, f) が定理 1.20 の普遍写像性質を満たしていることを示せばよい. A' を結合代数, $f' : \mathfrak{g} \to A'$ をリー代数の準同型写像とする. 結合代数の準同型写像 $h : A \to A'$ に対して $f' = h \circ f$ が成り立つための必要十分条件は, 任意の $i \in I$ に対して $f'(e_i) = (h \circ f)(e_i)$ が成り立つことであるが, $f(e_i) = \tilde{e}_i$ なので, これは $f'(e_i) = h(\tilde{e}_i)$ $(i \in I)$ と同値である. ところが

$$f'(e_i)f'(e_j) - f'(e_j)f'(e_i) = [f'(e_i), f'(e_j)] = f'([e_i, e_j]) = \sum_{r\in I} c_{ijk} f'(e_k)$$

なので, 命題 1.21 により, 結合代数の準同型写像 $h : A \to A'$ であって $h(\tilde{e}_i) = f'(e_i)$ を満たすものがただ1つ存在する. したがって (A, f) は定理 1.20 の普遍写像性質を満たす. ∎

以上により包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の存在が確定し，定理 1.20 の証明が完結した．

以下補題 1.22 の記号を用いて，$U(\mathfrak{g})$ は $\{\tilde{e}_i\}_{i\in I}$ により生成され

$$\tilde{e}_i\tilde{e}_j - \tilde{e}_j\tilde{e}_i = \sum_{k\in I} c_{ijk}\tilde{e}_k \qquad (i,j\in I)$$

を基本関係式とする結合代数であるとする．

1.23 [補題] 添え字集合 I 上の全順序 $\leqq$ を 1 つ固定する．このとき $U(\mathfrak{g})$ の任意の元は

$$\tilde{e}_{i_1}\tilde{e}_{i_2}\cdots\tilde{e}_{i_m} \qquad (0\leqq m<\infty, i_1\leqq i_2\leqq\cdots\leqq i_m)$$

の形の，順序を保つ単項式の線形結合で表される．

証明 $U(\mathfrak{g})$ の任意の元は，$i_1\leqq i_2\leqq\cdots\leqq i_m$ を仮定しない一般の単項式 $\tilde{e}_{i_1}\cdots\tilde{e}_{i_m}$ の線形結合で表される．したがって，一般の単項式 $\tilde{e}_{i_1}\cdots\tilde{e}_{i_m}$ が順序を保つ単項式の線形結合で書けることを示せばよい．次数 m に関する帰納法を用いる．$m=0$ ならば明らか．$m>0$ とする．$\tilde{e}_{i_1}\cdots\tilde{e}_{i_m}$ が順序を保つ単項式でないならば，$i_r>i_{r+1}$ なる r がある．ここに関係式

$$\tilde{e}_{i_r}\tilde{e}_{i_{r+1}} = \tilde{e}_{i_{r+1}}\tilde{e}_{i_r} + \sum_{j\in I} c_{i_r i_{r+1} j}\tilde{e}_j$$

を使うと，$\tilde{e}_{i_1}\cdots\tilde{e}_{i_m}$ は $\tilde{e}_{i_1}\cdots\tilde{e}_{i_{r+1}}\tilde{e}_{i_r}\cdots\tilde{e}_{i_m}$ と次数の小さい単項式の和で書けることがわかる．帰納法の仮定により，$\tilde{e}_{i_1}\cdots\tilde{e}_{i_{r+1}}\tilde{e}_{i_r}\cdots\tilde{e}_{i_m}$ が順序を保つ単項式の線形結合で書けることを示せばよい．この操作を繰り返して添え字の列 $(i_1,\ldots,i_m)$ の順序の入れ替えを行うことにより，任意の単項式は順序を保つ単項式の線形結合に書き直せることがわかる． ∎

上の証明は，$U(\mathfrak{g})$ における一般の単項式を順序を保つ単項式の線形結合に書き直す手順を与えていることに注意しておく．

実はさらに強く次の定理が成り立つ．

1.24 [定理] (ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理)[6] 添え字集合 I 上

[6] この定理を PBW と略して呼ぶことが多い．

の全順序 $\leqq$ を 1 つ固定し,

$$\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \ldots, i_r) | 0 \leqq r < \infty, i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r\}$$

とおく. $(U(\mathfrak{g}), \sigma)$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の包絡代数とするとき,

$$\{\sigma(e_{i_1})\sigma(e_{i_2}) \cdots \sigma(e_{i_r}) | (i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \mathcal{I}\}$$

は $U(\mathfrak{g})$ のベクトル空間としての基底となる（ただし $r = 0$ のときは, $\sigma(e_{j_1}) \cdots \sigma(e_{j_r}) = 1$ とする).

1.25 [注意]　定理 1.24 は, $U(\mathfrak{g})$ が, 順序を保つ単項式

$$\Xi = \{\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r} | i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r\}$$

を基底とするベクトル空間であるを意味している. また順序を保つ 2 つの単項式 $\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r}, \tilde{e}_{j_1} \cdots \tilde{e}_{j_s}$ の積 $\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r} \tilde{e}_{j_1} \cdots \tilde{e}_{j_s}$ は一般の単項式になるが, 補題 1.23 の証明の手順により順序を保つ単項式の線形結合に書き直すことができる. これにより Ξ を基底とするベクトル空間 $U(\mathfrak{g})$ 上の積が完全に定まる.

定理 1.24 の証明を述べよう.

$$\Xi = \{\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r} | i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r\}$$

が $U(\mathfrak{g})$ を張ることは, 既に補題 1.23 において示されているので, Ξ の線形独立性のみを示せばよい.

文字 $\{e_i\}_{i \in I}$ に関する非可換多項式環を $T = \mathbf{K}\langle e_i | i \in I\rangle$ とする. $\mathfrak{g}$ を $\{e_i\}_{i \in I}$ によって張られる T の部分空間と同一視し, $\mathfrak{g}$ は T に含まれているものと思う. したがって, 例えば $i, j \in I$ に対する $[e_i, e_j]$ は T の元としては, $\sum_{k \in I} c_{ijk} e_k$ を意味するものとする.

1.26 [補題]　T から（可換）多項式環 $S = \mathbf{K}[y_i | i \in I]$ への線形写像 $\Phi : T \to S$ であって以下の条件を満たすものが存在する.

$$\Phi(1) = 1, \qquad \Phi(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}) = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_r} \quad (i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r), \tag{1.6}$$

$$\Phi(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) - \Phi(e_{i_1} \cdots e_{i_{k+1}} e_{i_k} \cdots e_{i_r}) = \Phi(e_{i_1} \cdots [e_{i_k}, e_{i_{k+1}}] \cdots e_{i_r}). \tag{1.7}$$

Ξ の線形独立性が補題 1.26 から従うことを，先に見ておこう．$\{e_ie_j - e_je_i - [e_i, e_j] | i, j \in I\}$ で生成される T の両側イデアルを $\mathcal{I}$ とするとき，$U(\mathfrak{g}) = T/\mathcal{I}$,$\tilde{e}_i = \overline{e_i} \in U(\mathfrak{g})$ となるのであった．$\mathcal{I}$ はその定義から，

$$e_{i_1} \cdots e_{i_r} - e_{i_1} \cdots e_{i_{k+1}} e_{i_k} \cdots e_{i_r} - e_{i_1} \cdots [e_{i_k}, e_{i_{k+1}}] \cdots e_{i_r}$$

の形の元の線形結合の全体からなる．したがって，(1.7) により，線形写像 $\tilde{\Phi}$: $U(\mathfrak{g}) \to S$ を $\tilde{\Phi}(\overline{F}) = \Phi(F)$ により矛盾なく定めることができる．このとき (1.6) により，$i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r$ ならば $\tilde{\Phi}(\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r}) = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_r}$ となるので，

$$\{\tilde{\Phi}(\tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_r}) | i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r\}$$

は線形独立である．したがって Ξ も線形独立である．

最後に残った補題 1.26 の証明を述べよう．

次数 r の単項式 $e_{i_1} \cdots e_{i_r} \in T$ に対して

$$\tau(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = \sharp\{(a, b) | 1 \leqq a < b \leqq r,\, i_a > i_b\}$$

をその転倒数と呼ぶ．単項式 $e_{i_1} \cdots e_{i_r} \in T$ において，$i_1 \leqq \cdots \leqq i_r$ が成り立つための必要十分条件は，その転倒数が 0 になることである．また

$$\tau(e_{i_1} \cdots e_{i_{k+1}} e_{i_k} \cdots e_{i_r}) = \begin{cases} \tau(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) & (i_k = i_{k+1}), \\ \tau(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) + 1 & (i_k < i_{k+1}), \\ \tau(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) - 1 & (i_k > i_{k+1}) \end{cases} \tag{1.8}$$

が成り立つ．実際

$$\tau(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = \sum_{b=1}^{r} \tau_b(e_{i_1} \cdots e_{i_r}),$$
$$\tau_b(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = \sharp\{a | 1 \leqq a < b \leqq r,\, i_a > i_b\}$$

であるが，

$$\tau_b(e_{i_1} \cdots e_{i_{k+1}} e_{i_k} \cdots e_{i_r}) = \tau_b(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) \quad (b \neq k, k+1),$$

$$
\tau_k(e_{i_1}\cdots e_{i_{k+1}}e_{i_k}\cdots e_{i_r})+\tau_{k+1}(e_{i_1}\cdots e_{i_{k+1}}e_{i_k}\cdots e_{i_r})
$$
$$
=\begin{cases}\tau_k(e_{i_1}\cdots e_{i_r})+\tau_{k+1}(e_{i_1}\cdots e_{i_r}) & (i_k=i_{k+1}),\\ \tau_k(e_{i_1}\cdots e_{i_r})+\tau_{k+1}(e_{i_1}\cdots e_{i_r})+1 & (i_k<i_{k+1})\\ \tau_k(e_{i_1}\cdots e_{i_r})+\tau_{k+1}(e_{i_1}\cdots e_{i_r})-1 & (i_k>i_{k+1})\end{cases}
$$

が成り立っている．

次数 r の単項式の全体で張られる T の部分空間を T^r，次数が r で転倒数が m 以下の単項式の全体で張られる T の部分空間を T^r_m で表す．このとき

$$
T=\bigoplus_{r=0}^{\infty}T^r, \qquad T^r_0\subset T^r_1\subset\cdots\subset T^r=\bigcup_m T^r_m
$$

が成り立つ．そこで線形写像 Φ を，次のように r と m に関して帰納的に定める．まず $\Phi(1)=1$ とする．これで $\Phi|T^0$ が定まった．いま $p>0$ で $\Phi|\bigoplus_{r=0}^{p-1}T^r$ が既に定まっており，しかも $r<p$ に対して (1.6), (1.7) が成立しているとする．このとき，次数が p で転倒数が 0 の単項式 $e_{i_1}\cdots e_{i_p}$ に対しては，$\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_p})=y_{i_1}\cdots y_{i_p}$ とする．これで $\Phi|(\bigoplus_{r=0}^{p-1}T^r)\oplus T^p_0$ が定まった．次に $p>0, m>0$ で $\Phi|(\bigoplus_{r=0}^{p-1}T^r)\oplus T^r_{m-1}$ が既に定まっており，しかも $r\leqq p$ に対する (1.6) と，$r<p$ のとき，および $r=p$ で $e_{i_1}\cdots e_{i_r}$ と $e_{i_1}\cdots e_{i_{k+1}}e_{i_k}\cdots e_{i_r}$ の転倒数がともに $m-1$ 以下のときの (1.7) が成立しているとする．このとき，次数が p で転倒数が m の単項式 $e_{i_1}\cdots e_{i_p}$ に対して，$\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_p})$ を次のように定める．$e_{i_1}\cdots e_{i_p}$ の転倒数は $m>0$ なので，$i_a>i_{a+1}$ を満たす a が少なくとも 1 つ存在する．このような a を 1 つ決めて，

$$
\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_p})=\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_p})+\Phi(e_{i_1}\cdots[e_{i_a},e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_p}) \tag{1.9}
$$

とおく．$e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_p}$ の転倒数は $m-1$，$e_{i_1}\cdots[e_{i_a},e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_p}$ は次数が $p-1$ の単項式の線形結合なので

$$
e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_p}\in T^p_{m-1}, \qquad e_{i_1}\cdots[e_{i_a},e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_r}\in T^{p-1}
$$

となり，(1.9) の右辺は既に定まっていることに注意されたい．

これで $\Phi|(\bigoplus_{r=0}^{p-1}T^r)\oplus T^r_m$ が定まったが，このとき，$r=p$ で $e_{i_1}\cdots e_{i_r}$ と $e_{i_1}\cdots e_{i_{k+1}}e_{i_k}\cdots e_{i_r}$ の転倒数がともに m 以下ならば (1.7) が成立しているこ

とを見ればよい．もしも 2 つの単項式 $e_{i_1}\cdots e_{i_p}$ と $e_{i_1}\cdots e_{i_{k+1}}e_{i_k}\cdots e_{i_p}$ の転倒数がともに $m-1$ 以下ならば，このことは既にわかっている．またこの 2 つの単項式の転倒数がともに m となるのは $i_k = i_{k+1}$ のときだけであるが，この場合には (1.7) は明らか．したがって，2 つの単項式の一方の転倒数が m で他方の転倒数が $m-1$ のときを示せばよい．条件 (1.7) は e_{i_k} と $e_{i_{k+1}}$ に関して対称（(1.7) が成り立てば，e_{i_k} と $e_{i_{k+1}}$ を入れ替えた式も成立する）なので，結局，$e_{i_1}\cdots e_{i_p}$ の転倒数が m で $i_k > i_{k+1}$ のときに (1.7) が成立していることを示せばよい．言い換えると，(1.9) が $i_a > i_{a+1}$ を満たす a の選び方にはよらないことをいえばよい．$i_b > i_{b+1}$ を満たす別の b があるとする．

まず $|b-a|>1$ のときを考える．2 つの単項式 $e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_p}$ および $e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_{b+1}}e_{i_b}\cdots e_{i_p}$ の転倒数はそれぞれ $m-1, m-2$ なので (1.7) が使えて，

$$\begin{aligned}
&\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_p})\\
=&\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_{b+1}}e_{i_b}\cdots e_{i_p})\\
&\qquad+\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots [e_{i_b}, e_{i_{b+1}}]\cdots e_{i_p})
\end{aligned}$$

となる．また $e_{i_1}\cdots[e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_p}$ は次数が $p-1$ の単項式の線形結合なので，やはり (1.7) により，

$$\begin{aligned}
&\Phi(e_{i_1}\cdots [e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_p})\\
=&\Phi(e_{i_1}\cdots [e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_{b+1}}e_{i_b}\cdots e_{i_p})\\
&\qquad+\Phi(e_{i_1}\cdots [e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots [e_{i_b}e_{i_{b+1}}]\cdots e_{i_p})
\end{aligned}$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned}
&\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_p})+\Phi(e_{i_1}\cdots [e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_p})\\
=&\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots e_{i_{b+1}}e_{i_b}\cdots e_{i_p})\\
&\qquad+\Phi(e_{i_1}\cdots e_{i_{a+1}}e_{i_a}\cdots [e_{i_b}e_{i_{b+1}}]\cdots e_{i_p})\\
&\qquad+\Phi(e_{i_1}\cdots [e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots e_{i_{b+1}}e_{i_b}\cdots e_{i_p})\\
&\qquad+\Phi(e_{i_1}\cdots [e_{i_a}e_{i_{a+1}}]\cdots [e_{i_b}e_{i_{b+1}}]\cdots e_{i_p})
\end{aligned}$$

となる．ところがこの式の右辺は a と b に関して対称なので，(1.9) は a を用いて定義しても，b を用いて定義しても，結局同じものになることがわかった．

次に $|b-a|=1$ のときを考える．$b=a+1$ としてよい．簡単のため $x=e_a, y=e_{a+1}, z=e_{a+2}$ とおく．このとき

$$\Phi(\cdots yxz\cdots)+\Phi(\cdots[x,y]z\cdots)=\Phi(\cdots xzy\cdots)+\Phi(\cdots x[y,z]\cdots)$$

を示せばよい．先ほどと同様の計算により，

$$\begin{aligned}\Phi(\cdots yxz\cdots)=&\Phi(\cdots yzx\cdots)+\Phi(\cdots y[x,z]\cdots)\\=&\Phi(\cdots zyx\cdots)+\Phi(\cdots[y,z]x\cdots)+\Phi(\cdots y[x,z]\cdots),\\\Phi(\cdots xzy\cdots)=&\Phi(\cdots zxy\cdots)+\Phi(\cdots[x,z]y\cdots)\\=&\Phi(\cdots zyx\cdots)+\Phi(\cdots z[x,y]\cdots)+\Phi(\cdots[x,z]y\cdots).\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\Phi(\cdots[y,z]x\cdots)-\Phi(\cdots y[z,x]\cdots)+\Phi(\cdots[x,y]z\cdots)\\=&\Phi(\cdots z[x,y]\cdots)-\Phi(\cdots[z,x]y\cdots)+\Phi(\cdots x[y,z]\cdots)\end{aligned}\tag{1.10}$$

を示せばよい．ところが

$$\begin{aligned}\Phi(\cdots x[y,z]\cdots)-\Phi(\cdots[y,z]x\cdots)=&\Phi(\cdots[x,[y,z]]\cdots),\\\Phi(\cdots y[z,x]\cdots)-\Phi(\cdots[z,x]y\cdots)=&\Phi(\cdots[y,[z,x]]\cdots),\\\Phi(\cdots z[x,y]\cdots)-\Phi(\cdots[x,y]z\cdots)=&\Phi(\cdots[z,[x,y]]\cdots)\end{aligned}$$

なので，(1.10) はヤコビ恒等式

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

より明らかである．

以上で (1.9) が $i_a>i_{a+1}$ を満たす a の選び方によらずに定まることが示された．これで補題 1.26 が示され，定理 1.24 の証明が完了した．

定理 1.24 から以下の事実が従う．

1.27 [系]　$(U(\mathfrak{g}),\sigma)$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の包絡代数とするとき，σ は単射である．

証明　$\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_i\}_{i\in I}$ をとるとき，$\{\sigma(e_i)|i\in I\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底の一部をなすので線形独立である．よって σ は単射である．∎

これにより $\mathfrak{g}$ を $U(\mathfrak{g})$ の部分リー代数と見なすことができる．以下 $\mathfrak{g}$ は $U(\mathfrak{g})$ に含まれているものと思い，$a \in \mathfrak{g}$ に対する $\sigma(a)$ を単に a と書く．

1.28 [系]　$\mathfrak{h}$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の部分リー代数とし，$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の包絡代数をそれぞれ $(U(\mathfrak{g}), \sigma_{\mathfrak{g}}), (U(\mathfrak{h}), \sigma_{\mathfrak{h}})$ とする．このとき $U(\mathfrak{h})$ は $\sigma_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ により生成される $U(\mathfrak{g})$ の部分結合代数と同型である．

証明　$\mathfrak{h}$ の基底 $\{e_i\}_{i \in I}$ を 1 つ選び，これを拡張して $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_j\}_{j \in J}$ を定める $(I \subset J)$．J 上の全順序を 1 つ決めて，これにより I も全順序集合と見なし，

$$\Xi = \{e_{j_1} \cdots e_{j_r} | 0 \leqq r < \infty, j_1, \ldots, j_r \in J, j_1 \leqq \cdots \leqq j_r\} \subset U(\mathfrak{g})$$
$$\Xi_I = \{e_{i_1} \cdots e_{i_r} | 0 \leqq r < \infty, i_1, \ldots, i_r \in I, i_1 \leqq \cdots \leqq i_r\} \subset U(\mathfrak{g})$$

とおく（さっそく $\mathfrak{g}$ の元を $U(\mathfrak{g})$ の元と見なした．なお Ξ_I は $U(\mathfrak{h})$ ではなく $U(\mathfrak{g})$ の部分集合と思っていることに注意）．Ξ_I は $U(\mathfrak{g})$ の基底 Ξ の部分集合なので，線形独立である．$x, y \in \Xi$ の積 xy は，補題 1.23 の証明の手順に従って xy を Ξ の元の線形結合に書き直すことにより定まる．ここで $x, y \in \Xi_I$ のときを考えると，$\mathfrak{h}$ が部分リー代数であることから，xy は，I の元のみに関する関係式

$$e_{i_1} e_{i_2} - e_{i_2} e_{i_1} = \sum_{i_3 \in I} c_{i_1 i_2 i_3} e_{i_3} \qquad (i_1, i_2 \in I)$$

を用いて，Ξ_I の元の線形結合に書き直すことができる．このことは，Ξ_I により張られる $U(\mathfrak{g})$ の部分空間 A が $U(\mathfrak{h})$ と同型な部分結合代数であることを意味する（注意 1.25 を参照）．また以上の議論から A が $\sigma_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ により生成されることも明らか．∎

1.29 [問題]　以下の手順により，系 1.28 のよりスマートな証明を与えよ．

(i) $j : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ を埋め込み写像とする．結合代数の準同型 $\tilde{j} : U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$ であって $\sigma_{\mathfrak{g}} \circ j = \tilde{j} \circ \sigma_{\mathfrak{h}}$ を満たすものがただ 1 つ存在することを，包絡代数 $U(\mathfrak{h})$ の普遍写像性質を用いて示せ．

(ii) $\tilde{j}$ の像は $\sigma_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ により生成される $U(\mathfrak{g})$ の部分結合代数であることを示せ．

(iii) $\tilde{j}$ が単射であることを，定理 1.24 を用いて示せ．

1.30 [例]　$\mathfrak{g}$ を可換なリー代数とする．$\{e_i\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の基底 とするとき，$\mathfrak{g}$ の可換性により，$U(\mathfrak{g})$ における関係式 $e_ie_j = e_je_i \quad (i,j \in I)$ が成り立つ．したがって多項式環 $\mathbf{K}[e_i|i \in I]$ から $U(\mathfrak{g})$ への全射準同型写像が定まるが，定理 1.24 によりこれは基底を基底に移すので，同型写像である．すなわち $U(\mathfrak{g})$ は多項式環 $\mathbf{K}[e_i|i \in I]$ と同型である[7]．　□

3. リー代数の表現

ベクトル空間 V_1, V_2 に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V_1, V_2) := \{V_1 \text{ から } V_2 \text{ への線形写像 }\}$$

とおく．これは自然にベクトル空間になる．またベクトル空間 V に対して

$$\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, V) = \{V \text{ の線形変換 }\}$$

とおく．$\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ は単にベクトル空間になるだけでなく，さらに写像の合成により積が定まり，これにより 結合代数になる．$\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ を例 1.6 によりリー代数と見なすときには，これを $\mathfrak{gl}(V)$ と書くこともある．V が有限次元ならば，その基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を 1 つ選び，$f \in \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ に対して，

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \quad (j = 1, \ldots, n)$$

で定まる f の表現行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ を対応させることにより，結合代数の同型

$$\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V) \cong M_n(\mathbf{K}) \tag{1.11}$$

が定まる．よって特に，リー代数の同型

$$\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K}) \tag{1.12}$$

が得られる．

---

[7] 基底の選び方によらない言い方をすれば，$U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の対称代数 $S(\mathfrak{g})$ と同型であるということになる．

1.31 ［定義］　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする．ベクトル空間 V およびリー代数の準同型写像

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

が与えられたとき，(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の（V 上での）**表現**（representation）と呼ぶ．

リー代数の表現 (ρ, V) において V が有限次元のとき，これを有限次元表現と呼ぶ．(ρ, V) を有限次元表現とするとき，V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を 1 つ選んで (1.12) により $\mathfrak{gl}(V)$ と $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ を同一視することにより，リー代数の準同型写像

$$\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$$

が得られる．この $\overline{\rho}$ を表現 (ρ, V) の（基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に関する）行列表示と呼ぶ．

1.32 ［例］　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする．$\mathfrak{g}$ の 1 次元表現 $(\epsilon, \mathbf{K})$ が，任意の $a \in \mathfrak{g}$ について $\epsilon(a) = 0$ として得られる．これをリー代数 $\mathfrak{g}$ の**自明表現**（trivial representation）と呼ぶ．　□

1.33 ［例］　$\mathfrak{g}$ をリー代数とする．$a \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(a) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ を

$$\mathrm{ad}(a)(x) = [a, x] \qquad (x \in \mathfrak{g}) \tag{1.13}$$

により定める．ヤコビ恒等式により，$(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の表現を定める．これをリー代数 $\mathfrak{g}$ の**随伴表現**（adjoint representation）と呼ぶ．なお，ヤコビ恒等式は

$$\mathrm{ad}(a)([x, y]) = [\mathrm{ad}(a)(x), y] + [x, \mathrm{ad}(a)(y)] \qquad (a, x, y \in \mathfrak{g}) \tag{1.14}$$

と書き直すこともできる．これと帰納法を用いて，有用な公式

$$\mathrm{ad}(a)([x_1, \ldots, x_r]) = \sum_{i=1}^{r} [x_1, \ldots, \mathrm{ad}(a)(x_i), \ldots, x_r] \qquad (a, x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{g}) \tag{1.15}$$

を得る（ここで $[x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_r] = [x_1, [x_2, \ldots, [x_{r-1}, x_r] \cdots]$ なる記法を用いた）．　□

1.34［例］　$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数とする．$i:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ を埋め込み写像とするとき，(i,V) はリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現である．　□

1.35［例］　$\mathfrak{g}$ を可換リー代数とする．$\lambda\in\mathfrak{g}^*=\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g},\mathbf{K})$ に対して，$\mathfrak{g}$ の1次元表現 $(\rho_\lambda,\mathbf{K})$ が

$$\rho_\lambda(a)=\lambda(a)\in\mathbf{K}=\mathfrak{gl}(\mathbf{K})\qquad(a\in\mathfrak{g})$$

により定まる．　□

少し無限次元表現の例も見ておこう．

1.36［例］　$\mathfrak{g}$ を例1.8のリー代数とする（ハイゼンベルグ代数）．$\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ を変数とする多項式環を $\mathbf{K}[x_\lambda|\lambda\in\Lambda]$ と記す．線形写像 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathbf{K}[x_\lambda|\lambda\in\Lambda])$ を

$$\rho(b_\lambda)(f)=x_\lambda f,\quad \rho(a_\lambda)(f)=\partial_\lambda f,\quad \rho(c)(f)=f\quad(f\in\mathbf{K}[x_\lambda|\lambda\in\Lambda])$$

により定める．ただし ∂_λ は変数 x_λ に関する偏微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x_\lambda}$ を表すものとする．このとき $(\rho,\mathbf{K}[x_\lambda|\lambda\in\Lambda])$ は $\mathfrak{g}$ の表現を定める．このことを示すためには，関係式

$$\begin{aligned}
&[\rho(c),\rho(a_\lambda)]=[\rho(c),\rho(b_\lambda)]=0\qquad(\lambda\in\Lambda),\\
&[\rho(a_\lambda),\rho(a_\mu)]=[\rho(b_\lambda),\rho(b_\mu)]=0\qquad(\lambda,\mu\in\Lambda),\\
&[\rho(a_\lambda),\rho(b_\mu)]=\delta_{\lambda,\mu}\rho(c)\qquad(\lambda,\mu\in\Lambda)
\end{aligned}$$

を確かめればよい．積の微分の公式 $\partial_\lambda(fg)=\partial_\lambda(f)g+f\partial_\lambda(g)$ により

$$\begin{aligned}
&[\rho(a_\lambda),\rho(b_\mu)](f)=\partial_\lambda(x_\mu f)-x_\mu\partial_\lambda(f)\\
=&(\partial_\lambda(x_\mu)f+x_\mu\partial_\lambda(f))-x_\mu\partial_\lambda(f)=\delta_{\lambda,\mu}f=\delta_{\lambda,\mu}\rho(c)(f)
\end{aligned}$$

となるので，$[\rho(a_\lambda),\rho(b_\mu)]=\delta_{\lambda,\mu}\rho(c)$ が成立している．また，その他の関係式も同様に示される．この表現を，ハイゼンベルグ代数の**フォック表現**（Fock representation）と呼ぶ．　□

1.37 [例]　$\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の基底 $\{h, e, f\}$ を

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める．2 変数 x, y に関する多項式環 を $\mathbf{K}[x, y]$ で表す．線形写像 $\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \mathfrak{gl}(\mathbf{K}[x, y])$ を

$$\rho(h) = -x\partial_x + y\partial_y, \qquad \rho(e) = y\partial_x, \qquad \rho(f) = x\partial_y$$

により定める．ただし $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ はそれぞれ変数 x, y に関する偏微分作用素とする．このとき，$(\rho, \mathbf{K}[x, y])$ はリー代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現を与える．実際,

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h$$

なので,

$$[\rho(h), \rho(e)] = 2\rho(e), \qquad [\rho(h), \rho(f)] = -2\rho(f), \qquad [\rho(e), \rho(f)] = \rho(h)$$

を示せばよいが，これは例 1.36 と同様の計算により確かめることができる．　□

1.38 [例]　$(\rho, V), (\rho', V')$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, V')$ 上の $\mathfrak{g}$ の表現 $(\tau, \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, V'))$ が

$$(\tau(a)(f))(v) = \rho'(a)(f(v)) - f(\rho(a)(v)) \qquad (a \in \mathfrak{g},\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, V'),\ v \in V)$$

により定まる．特に (ρ', V') が自明表現 $(\epsilon, \mathbf{K})$ のときには，V の双対空間 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(V, \mathbf{K})$ 上の表現 (ρ^*, V^*) が

$$(\rho^*(a)(f))(v) = -f(\rho(a)(v)) \qquad (a \in \mathfrak{g},\ f \in V^*,\ v \in V)$$

により定まるが，これを (ρ, V) の**反傾表現** (contragradient representation) と呼ぶ．　□

リー代数 $\mathfrak{g}$ の 2 つの表現 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ は，ベクトル空間の同型写像 $f : V_1 \to V_2$ があって

$$\rho_2(a) = f \circ \rho_1(a) \circ f^{-1} \qquad (a \in \mathfrak{g})$$

となるとき，すなわち可換図式

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\rho_1(a)} & V_1 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V_2 & \xrightarrow[\rho_2(a)]{} & V_2 \end{array}$$

が成り立っているとき，**同値** (equivalent) であるという．これは，ベクトル空間の同型写像 f により V_1 と V_2 を，したがって $\mathfrak{gl}(V_1)$ と $\mathfrak{gl}(V_2)$ を同一視するとき，$\rho_1(a) \in \mathfrak{gl}(V_1)$ に対応するのが $\rho_2(a) \in \mathfrak{gl}(V_2)$ であることを意味しており，同値な表現は本質的に同じものと見なせる．リー代数の表現論とは表現の同値類の研究のことであるといえる．

$(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ を有限次元表現とし，それらの（ある基底に関する）行列表示を，$\overline{\rho}_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K}), \overline{\rho}_2 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_m(\mathbf{K})$ とすると，2 つの表現が同値であるための必要十分条件は，$n = m$ でしかも，ある $A \in GL_n(\mathbf{K})$ があって

$$\overline{\rho}_2(a) = A\overline{\rho}_1(a)A^{-1} \qquad (a \in \mathfrak{g})$$

となることである．

(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．ベクトル空間 V の部分空間 W であって，

$$(\rho(a))(W) \subset W \qquad (a \in \mathfrak{g})$$

を満たすもののことを**不変部分空間** (invariant subspace) と呼ぶ．W が不変部分空間ならば $\rho(a)$ の W への制限 $\rho_W(a) \in \mathfrak{gl}(W)$ を考えて，$\mathfrak{g}$ の表現 (ρ_W, W) が定まる．これを (ρ, V) の**部分表現** (subrepresentation) と呼ぶ．また $a \in \mathfrak{g}$ に対して商ベクトル空間 V/W の線形変換 $\rho_{V/W}(a)$ を $\rho_{V/W}(a)(\overline{v}) = \overline{\rho(a)(v)}$ により定めるとき，$(\rho_{V/W}, V/W)$ は $\mathfrak{g}$ の表現となる．これを (ρ, V) の**商表現** (quotient representation) と呼ぶ．

1.39 [問題]　リー代数の随伴表現の不変部分空間とはイデアルのことに他ならないことを示せ．

1.40 [問題]　(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現，W をその不変部分空間とする．W を含む (ρ, V) の不変部分空間の集合と商表現 $(\rho_{V/W}, V/W)$ の不変部分空間の集合は，対応 $W' \leftrightarrow W'/W$（W' は W を含む (ρ, V) の不変部分空間）により，1 対 1 に対応することを示せ．

1.41［例］　例 1.37 で述べた $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現 $(\rho, \mathbf{K}[x,y])$ を考える．非負整数 n に対して，2 変数 x, y に関する n 次斉次多項式全体のなす $\mathbf{K}[x,y]$ の部分空間を $V(n)$ とする．すなわち $V(n)$ は $\{x^i y^{n-i} | i = 0, \ldots, n\}$ を基底とする $(n+1)$ 次元ベクトル空間とする．このとき ρ の定義により，$V(n)$ は $\mathbf{K}[x,y]$ の不変部分空間となる．これから定まる $(\rho, \mathbf{K}[x,y])$ の部分表現を，$(\rho_n, V(n))$ で表す．$V(n)$ の基底を用いて $\rho_n(h)$, $\rho_n(e)$, $\rho_n(f)$ を具体的に書くと，

$$\rho_n(h)(x^i y^{n-i}) = (n-2i)x^i y^{n-i},$$

$$\rho_n(e)(x^i y^{n-i}) = \begin{cases} i x^{i-1} y^{n-i+1} & (i \neq 0) \\ 0 & (i = 0), \end{cases}$$

$$\rho_n(f)(x^i y^{n-i}) = \begin{cases} (n-i) x^{i+1} y^{n-i-1} & (i \neq n) \\ 0 & (i = n) \end{cases}$$

となる．　□

1.42［問題］　例 1.41 で与えられた $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現 $(\rho_2, V(2))$ は $\mathbf{K}$ の標数が 2 でないとき，随伴表現と同値であることを示せ．

(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現，W を不変部分空間とする．V の基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ が W の基底となるようにとるとき，この基底による (ρ, V) の行列表示 $\overline{\rho}$ は，

$$\overline{\rho}(a) = \begin{pmatrix} \overline{\rho}_1(a) & * \\ 0 & \overline{\rho}_2(a) \end{pmatrix} \qquad (\overline{\rho}_1(a) \in \mathfrak{gl}_m(\mathbf{K}), \overline{\rho}_2(a) \in \mathfrak{gl}_{n-m}(\mathbf{K}))$$

の形になり，さらに $\overline{\rho}_1$ が (ρ_W, W) の基底 $\{e_1, \ldots, e_m\}$ に関する行列表示を，また $\overline{\rho}_2$ が $(\rho_{V/W}, V/W)$ の基底 $\{\overline{e_{m+1}}, \ldots, \overline{e_n}\}$ に関する行列表示を与えている．

表現 (ρ, V) において V 自身および $\{0\}$ は常に不変部分空間であるが，これらを自明な不変部分空間と呼ぶ．表現 (ρ, V) において，$V \neq \{0\}$ でしかも不変部分空間が自明なものしかないとき，表現 (ρ, V) は**既約**（irreducible）であるという．また自明でない不変部分空間があるとき，(ρ, V) は**可約**（reducible）であるという．

1.43 [例]　$\mathfrak{g}$ を代数閉体 $\mathbf{K}$ 上の可換リー代数，(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．$a \in \mathfrak{g}$ と $\rho(a)$ の固有値 c を選び，$W = \{v \in V \mid \rho(a)(v) = cv\}$ とおくと，これは不変部分空間になる．実際 $b \in \mathfrak{g}, v \in W$ とすると

$$\rho(a)(\rho(b)(v)) = (\rho(a) \circ \rho(b))(v) = (\rho(b) \circ \rho(a))(v) = c\rho(b)(v)$$

により，$\rho(b)(v) \in W$ である．$W \neq \{0\}$ なので (ρ, V) の既約性により，$W = V$ でなければならない．これは $\rho(a)$ が V にスカラー倍で作用しているということに他ならない．任意の $\mathfrak{g}$ の元が V にスカラー倍で作用しているので，V の任意の部分空間は不変部分空間である．したがって $\dim V = 1$ でなければならない．このとき $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbf{K}$ が $\rho(a) = \lambda(a)\,\mathrm{id}$ で定まるが，ρ の線形性により $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ が従う．よって (ρ, V) は例 1.35 における $(\rho_\lambda, \mathbf{K})$ と同値である．以上により，代数閉体上の可換リー代数の任意の有限次元既約表現は，ある $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対する $(\rho_\lambda, \mathbf{K})$ と同値になることがわかった．□

1.44 [例]　$\mathbf{K}$ の標数が 0 ならば，ハイゼンベルグ代数のフォック表現は既約であることを示そう．例 1.36 の記号を用いる．W を $\mathbf{K}[x_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ の $\{0\}$ でない不変部分空間とする．W の 0 と異なる元 f を 1 つとる．f に実際に含まれる変数を $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_r}$ とする．f を x_{λ_1} に関して展開して，

$$f = g_0 x_{\lambda_1}^N + g_1 x_{\lambda_1}^{N-1} + \cdots + g_N$$

とする（$g_0, \dots, g_N$ は $x_{\lambda_2}, \dots, x_{\lambda_r}$ に関する多項式で，$g_0 \neq 0$）．このとき

$$N! g_0 = \partial_{\lambda_1}^N (f) = \rho(a_{\lambda_1})^N (f) \in W$$

となるが，いま $\mathbf{K}$ の標数は 0 としたので，$g_0 \in W$ がわかる．これを繰り返すと，結局 $1 \in W$ がわかる．このとき，任意の $\mu_1, \cdots, \mu_s \in \Lambda$ と非負整数の族 $n_1, \cdots, n_s$ について，

$$x_{\mu_1}^{n_1} \dots x_{\mu_s}^{n_s} = \rho(b_{\mu_1})^{n_1} \dots \rho(b_{\mu_s})^{n_s}(1) \in W$$

となるので，$W = \mathbf{K}[x_\lambda | \lambda \in \Lambda]$ となる．以上により主張が示された．□

1.45 [例]　例 1.41 で与えたリー代数 $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現 $(\rho_n, V(n))$ を考える．簡単のために $v_i = x^i y^{n-i}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ とおく．$\{v_0, \dots, v_n\}$ は $V(n)$ の基底になっている．

まず $\mathbf{K}$ の標数が 0 の場合を考える．W を不変部分空間とする．W は $\rho_n(h)$ で不変なので，$\rho_n(h)$ の W への制限 $(\rho_n(h))|W$ を考えることができる．$(\rho_n(h))(v_i) = (n-2i)v_i$ なので $\rho_n(h)$ は半単純な線形変換（すなわちその表現行列が対角化可能）である．したがって $\rho_n(h)|W$ も半単純な線形変換である（注意 1.46 参照）．すなわち W は $\rho_n(h)$ の固有ベクトルからなる基底をもつ．$v_0, \ldots, v_n$ は $\rho_n(h)$ の相異なる固有値に属する固有ベクトルなので，$\rho_n(h)$ の固有ベクトルはある i に関する v_i の定数倍に限る．したがって $\{0, \ldots, n\}$ のある部分集合 I に関して $\{v_i | i \in I\}$ が W の基底となる．$i \in I, i > 0$ とすると，$(\rho_n(e))(v_i) = iv_{i-1}$ により $i-1 \in I$ でなくてはならない．同様に，$i \in I, i < n$ とすると，$(\rho_n(f))(v_i) = (n-i)v_{i+1}$ により $i+1 \in I$ でなくてはならない．したがって，$I = \{0, \ldots, n\}$ または $I = \emptyset$，すなわち $W = V$ または $W = \{0\}$ である．よって $(\rho_n, V(n))$ が既約表現であることがわかった．

次に $\mathbf{K}$ の標数が $p > 0$ のときを考える．$n \geqq p$ ならば $\{v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ を基底とする部分空間 W は自明でない部分空間になっているので，$(\rho_n, V(n))$ は可約表現である．また $0 \leqq n \leqq p-1$ ならば $(\rho_n, V(n))$ は既約表現である．このことは $p \neq 2$ のときは標数が 0 のときと全く同じ論法により確かめることができる．$p = 2$ のときは，$n = 0$ ならば $\dim(V(0)) = 1$ より明らか．$n = 1$ ならば $\dim(V(1)) = 2$ なので，自明でない不変部分空間があるとすればそれは $W = \mathbf{K}v\,(v \neq 0)$ の形でなければならないが，このような不変部分空間がないことは直接計算で容易に確かめることができる．　□

1.46［注意］　一般に，ベクトル空間 V の半単純な線形変換 f を，f で不変な部分空間 W に制限したもの $f|W$ は，やはり半単純な線形変換である．実際，f の広義固有空間が固有空間と一致するので，$f|W$ の広義固有空間も固有空間と一致し，$f|W$ が半単純であることがわかる．あるいは補題 1.56 の証明と同様の論法により直接示すこともできる．

1.47［命題］

(i) $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ を $\mathfrak{g}$ の既約表現とする．線形写像 $f : V_1 \to V_2$ が

$$\rho_2(a) \circ f = f \circ \rho_1(a) \qquad (a \in \mathfrak{g})$$

を満たし，さらに $f \neq 0$ であると仮定する．このとき f は線形同型写像

である．したがって特に2つの表現 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ は同値である．

(ii) **シューアの補題**（**Schur's lemma**）　$\mathbf{K}$ は代数閉体であると仮定する．(ρ, V) を $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．このとき，V の線形変換 f であって

$$\rho(a) \circ f = f \circ \rho(a) \qquad (a \in \mathfrak{g})$$

を満たすものは，恒等写像の定数倍に限る．

証明　(i) $\mathrm{Ker}(f)$ は V_1 の不変部分空間なので，$\mathrm{Ker}(f) = V_1$ または $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ であるが，$f \neq 0$ と仮定したので，$\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ でなければならない．すなわち f は単射である．また $\mathrm{Im}(f)$ は V_2 の不変部分空間なので，$\mathrm{Im}(f) = V_2$ または $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ であるが，$f \neq 0$ と仮定したので，$\mathrm{Im}(f) = V_2$ でなければならない．すなわち f は全射である．

(ii) $\mathbf{K}$ は代数閉体なので，f の固有値 $c \in \mathbf{K}$ を考えることができる．このとき $W = \{v \in V | (f - c\,\mathrm{id})(v) = 0\}$ は V の不変部分空間で，しかも $W \neq \{0\}$ が成り立つ．よって $W = V$ でなければならない．すなわち $f = c\,\mathrm{id}$ が成立する．　■

$(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ をリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現とするとき，直和空間 $V_1 \oplus V_2$ 上の $\mathfrak{g}$ の表現 $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ が

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(a)(v_1 + v_2) = \rho_1(a)(v_1) + \rho_2(a)(v_2) \qquad (a \in \mathfrak{g}, v_i \in V_i)$$

により定まる．これを表現 $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ の**直和**（direct sum）と呼ぶ．より一般に，リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現の族 $\{(\rho_\lambda, V_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直和 $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda)$ が

$$(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda)(a)(\sum_{\lambda \in \Lambda} v_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(a)(v_\lambda) \qquad (a \in \mathfrak{g}, v_\lambda \in V_\lambda)$$

により定まる．$\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) の不変部分空間の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって，ベクトル空間として $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ となっているとき，(ρ, V) は自然に $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_{W_\lambda}, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda)$ と同値である．

既約表現の直和と同値な表現は**完全可約**（completely reducible）であるという．

1.48［命題］　リー代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) の不変部分空間の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ があって，各 $(\rho_{W_\lambda}, W_\lambda)$ は既約で，さらにベクトル空間として $V = \sum_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$（直和とは限らない和）となっているとき，$(\rho, V)$ は完全可約である．

証明　V は有限次元なので Λ は有限集合であるとしてよい．したがって Λ の部分集合 Λ' であって $\sum_{\lambda\in\Lambda'} W_\lambda$ が直和となるもののうちで極大なもの Λ_0 がとれる．$V' = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} W_\lambda$ とおくとき，$V = V'$ を示せばよい．$V \neq V'$ と仮定する．任意の $\mu \in \Lambda$ に対して $W_\mu \subset V'$ とすると，$V = \sum_{\mu\in\Lambda} W_\mu \subset V'$ となり矛盾である．よって $W_\mu \not\subset V'$ なる $\mu \in \Lambda$ が存在する．このとき $W_\mu \cap V'$ は W_μ の不変部分空間で，しかも $W_\mu \cap V' \neq W_\mu$ を満たす．したがって (ρ_{W_μ}, W_μ) の既約性により，$W_\mu \cap V' = \{0\}$ が成り立ち，$\sum_{\lambda\in\Lambda_0\cup\{\mu\}} W_\lambda$ は直和となるが，これは Λ_0 の極大性に矛盾する．よって $V = V'$ が成り立つ．■

1.49［命題］　リー代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 (ρ, V) に関して次の 2 条件は同値である．

(i) (ρ, V) は完全可約である．

(ii) 任意の不変部分空間 W に対して $V = W \oplus W'$ となる不変部分空間 W' が存在する．

証明　(i)⇒(ii) の証明．$(\rho, V) = (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda)$（ここで $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ は既約）としてよい．V は有限次元なので Λ は有限集合である．したがって Λ の部分集合 Λ' であって $W \cap (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda'} V_\lambda) = \{0\}$ を満たすもののうちで極大なもの Λ_0 がとれる．$W' = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} V_\lambda$ とおくとき $V = W \oplus W'$ となることを示せばよい．W' の定義により $W \cap W' = \{0\}$ なので $W + W' = W \oplus W'$ である．$W \oplus W' \subsetneqq V$ と仮定する．もしも任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $V_\lambda \subset W \oplus W'$ となるとすると，$V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \subset W \oplus W'$ となり矛盾するので，$V_\mu \not\subset W \oplus W'$ を満たす $\mu \in \Lambda$ が存在する．$\mu \in \Lambda_0$ とすると，$V_\mu \subset W' \subset W \oplus W'$ となり矛盾．したがって $\mu \notin \Lambda_0$ である．$V_\mu \cap (W \oplus W')$ は既約表現 (ρ_μ, V_μ) の不変部分空間なので，$V_\mu \cap (W \oplus W') = V_\mu$ または $V_\mu \cap (W \oplus W') = \{0\}$ であるが，$V_\mu \cap (W \oplus W') = V_\mu$ とすると，$V_\mu \subset W \oplus W'$ となり矛盾．よって $V_\mu \cap (W \oplus W') = \{0\}$ すなわち $V_\mu + (W \oplus W') = V_\mu \oplus W \oplus W'$ でなければならない．したがって $\Lambda_1 = \Lambda_0 \cup \{\mu\} \supsetneqq \Lambda_0$ とおくとき，$W \cap (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_1} V_\lambda) =$

$W \cap (W' \oplus V_\mu) = \{0\}$ となるが，これは Λ_0 の極大性に矛盾する．よって $W \oplus W' = V$ でなければならない．

(ii)⇒(i) の証明．$V = \{0\}$ なら明らかなので $\dim V > 0$ とする．(ρ, V) の $\{0\}$ でない不変部分空間であって次元が最小となるもの V_1 を 1 つとるとき，(ρ_{V_1}, V_1) は既約表現である．(ii) により $V = V_1 \oplus V_1'$ となる不変部分空間 V_1' が存在する．$V_1' = \{0\}$ なら明らかなので $\dim V_1' > 0$ とする．$(\rho_{V_1'}, V_1')$ の $\{0\}$ でない不変部分空間であって次元が最小となるもの V_2 を 1 つとるとき，(ρ_{V_2}, V_2) は既約表現である．(ii) により $V = (V_1 \oplus V_2) \oplus V_2'$ となる不変部分空間 V_2' が存在する．この操作を続けていくと，V は有限次元なので，どこかで $V_r' = \{0\}$ となり，(ρ, V) は $(\rho_{V_1}, V_1), \ldots, (\rho_{V_r}, V_r)$ の直和と同値であることがわかる．∎

1.50 [命題]　(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元完全可約表現，W をその不変部分空間とすると，部分表現 (ρ_W, W) および商表現 $(\rho_{V/W}, V/W)$ もまた完全可約である．さらに $(\rho, V) = (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda)$（ここで $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ は既約）とするとき，Λ のある部分集合 Λ_0 に対して，(ρ_W, W) および $(\rho_{V/W}, V/W)$ はそれぞれ $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} V_\lambda)$, $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0}, V_\lambda)$ と同値である．

証明　W を (ρ, V) の不変部分空間とする．命題 1.49 における (i)⇒(ii) の証明から，Λ のある部分集合 Λ_1 が存在して，$W' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} V_\lambda$ に関して $V = W \oplus W'$ が成立する．よって商表現 $(\rho_{V/W}, V/W)$ は部分表現 $(\rho_{W'}, W') = (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} V_\lambda)$ と同値である．また部分表現 (ρ_W, W) は商表現 $(\rho_{V/W'}, V/W')$ と同値であるが，$\Lambda_0 = \Lambda \setminus \Lambda_1$ に対して $V = W' \oplus (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} V_\lambda)$ なので，結局 (ρ_W, W) は $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} \rho_\lambda, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} V_\lambda)$ と同値である．∎

1.51 [注意]　ツォルンの補題を用いると，命題 1.49 における (i)⇒(ii) および命題 1.50 は，無限次元表現でも成立することがわかる．読者は各自試みられよ．

1.52 [例]　$\mathfrak{g}$ を例 1.4 のリー代数とするとき，$W = \mathbf{K}e$ は随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ の不変部分空間である．$\mathfrak{g} = W \oplus W'$ となる部分空間 W' は $W' = \mathbf{K}(h + ae)$ $(a \in \mathbf{K})$ の形をしているが，$(\mathrm{ad}(e))(h + ae) = -e \notin W'$ なので，これは不変部分

空間ではない．したがって $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ は完全可約ではない． □

(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする．$V \neq \{0\}$ ならば, V の $\{0\}$ でない不変部分空間のうちで次元が最小のものを 1 つとりそれを V^1 とする．$V \supsetneqq V^1$ ならば，V^1 を真に含む V の不変部分空間のうちで次元が最小のものを 1 つとりそれを V^2 とする．さらに $V \supsetneqq V^2$ ならば，V^2 を真に含む V の不変部分空間のうちで次元が最小のものを 1 つとりそれを V^3 とする．これを繰り返すと，V の有限次元性からどこかで $V = V^r$ となる．こうして V の不変部分空間の増大列

$$\{0\} = V^0 \subsetneqq V^1 \subsetneqq V^2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V^r = V$$

が定まる．このとき V^i の取り方から, V^i の不変部分空間で V^{i-1} を含むものは, V^{i-1} と V^i に限る．したがって問題 1.40 により $(\rho_{V^i/V^{i-1}}, V^i/V^{i-1})$ は $\mathfrak{g}$ の既約表現である．そこで V の基底 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を，$\{e_1, \ldots, e_{n_i}\}$ が V^i の基底になるようにとるとき ($n_i = \dim V^i$, したがって $n_1 < n_2 < \cdots < n_r = n$), これに関する (ρ, V) の行列表示 $\overline{\rho}$ は

$$\overline{\rho}(a) = \begin{pmatrix} \overline{\rho}_1(a) & & & & \\ & \overline{\rho}_2(a) & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \overline{\rho}_{r-1}(a) & \\ & & & & \overline{\rho}_r(a) \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathfrak{g})$$

の形になる．ここで $\overline{\rho}_i$ は既約表現 $(\rho_{V^i/V^{i-1}}, V^i/V^{i-1})$ の行列表示である．表現 (ρ, V) が完全可約であるということは，基底をうまく取り直すとき，右上の $*$ の部分も 0 にできるということに他ならない．

リー代数の表現に関する諸概念を, 包絡代数の言葉で言い換えてみよう．(ρ, V) をリー代数 $\mathfrak{g}$ の表現とする．$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ はリー代数の準同型写像なので包絡代数の普遍写像性質から，結合代数の準同型写像 $\tilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ であって $\rho = \tilde{\rho} \circ \sigma$ を満たすものがただ 1 つ存在する（$\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ は埋め込み写像)．$u \in U(\mathfrak{g})$ と $v \in V$ に対して $(\tilde{\rho}(u))(v)$ を単に uv と書くとき,

(a) $u(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1uv_1 + c_2uv_2 \qquad (u \in U(\mathfrak{g}), v_1, v_2 \in V, c_1, c_2 \in \mathbf{K})$,

(b) $(c_1u_1 + c_2u_2)v = c_1u_1v + c_2u_2v \qquad (u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g}), c_1, c_2 \in \mathbf{K}, v \in V)$,

(c) $u_1(u_2v) = (u_1u_2)v \qquad (u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g}), v \in V)$,

(d) $1v = v \qquad (v \in V)$

が成立する．これは V が $U(\mathfrak{g})$ 加群であるということに他ならない．

逆に V が $U(\mathfrak{g})$ 加群ならば（すなわち V はベクトル空間であって，(a), (b), (c), (d) を満たす $U(\mathfrak{g}) \times V \ni (u,v) \mapsto uv \in V$ が与えられているならば），$(\tilde{\rho}(u))(v) = uv$ により結合代数の準同型写像 $\tilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ が定まり，さらに $\rho = \tilde{\rho} \circ \sigma$ により $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) が定まる．

以上により，リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現と $U(\mathfrak{g})$ 加群は1対1に対応することがわかった．したがって，リー代数 $\mathfrak{g}$ の表現を与えることと $U(\mathfrak{g})$ 加群を与えることは，実は同じことなのである．表現と思うか加群と思うかはある程度趣味の問題であるが，今後はむしろ加群と思うことが多いであろう．加群の言葉遣いでは，2つの表現 (ρ, V), $(\rho' V')$ が同値であるとは，対応する $U(\mathfrak{g})$ 加群 V と V' が同型であるということである．また $\mathfrak{g}$ の表現 (ρ, V) の不変部分空間とは，$U(\mathfrak{g})$ 加群 V の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群のことであり，既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群とは，$\{0\}$ と異なる $U(\mathfrak{g})$ 加群であって，自明でない部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群を含まないもののことである．なお $U(\mathfrak{g})$ 加群のことを単に $\mathfrak{g}$ 加群ということもある．

4. 可換リー代数のウェイト表現

この節では $\mathfrak{h}$ を可換なリー代数とする．

$U(\mathfrak{h})$ 加群 V と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$V_\lambda = \{v \in V \,|\, hv = \lambda(h)v \ (h \in \mathfrak{h})\} \tag{1.16}$$

とおく．$V_\lambda \neq \{0\}$ のとき，λ を V の**ウェイト**（weight），V_λ をウェイト λ の**ウェイト空間**（weight space）と呼ぶ．本書ではこの後，ウェイトに関するいくつかのことが繰り返し用いられるであろう．難しくはないが基本的なことなので，ここでウェイトに関することをまとめておくことにする．

1.53［補題］　$f : V \to W$ を $U(\mathfrak{h})$ 加群の準同型写像とするとき，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $f(V_\lambda) \subset W_\lambda$ が成立する．

証明 $v \in V_\lambda$ とすると $h \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$hf(v) = f(hv) = \lambda(h)f(v)$$

なので，$f(v) \in W_\lambda$ である． ∎

1.54［補題］ V を $U(\mathfrak{h})$ 加群 とするとき，その部分空間の和 $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ は直和である．

証明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を $\mathfrak{h}^*$ の互いに相異なる元とし，$v_i \in V_{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ が $v_1 + \cdots + v_n = 0$ を満たすときに，任意の i について $v_i = 0$ となることを示せばよい．n に関する帰納法を用いる．$n = 1$ なら明らか．$n \geqq 2$ とする．任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_i - \lambda_n)(h)v_i = h\sum_{i=1}^{n} v_i - \lambda_n(h)\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

なので，帰納法の仮定により $(\lambda_i - \lambda_n)(h)v_i = 0$ が $i = 1, \ldots, n-1$ に対して成り立つ．$i \neq n$ のとき $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ なので，$(\lambda_i - \lambda_n)(h) \neq 0$ なる $h \in \mathfrak{h}$ がとれる．したがって $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $v_i = 0$．このとき $v_1 + \cdots + v_n = 0$ より $v_n = 0$ もわかる． ∎

$U(\mathfrak{h})$ 加群 V において，

$$V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda \ \left(= \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda\right)$$

が成立しているとき，V を広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群という．さらに，各 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\dim V_\lambda < \infty$ が成立しているとき，V を**ウェイト$U(\mathfrak{h})$ 加群**（weight $U(\mathfrak{h})$-module）と呼ぶ．

1.55［補題］ $\{t_i\}_{i=1}^{r}$ を $\mathfrak{h}$ の基底とする．有限次元 $U(\mathfrak{h})$ 加群 V がウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群になるための必要十分条件は，任意の $1 \leqq i \leqq r$ に対して，t_i の V への作用 $v \mapsto t_i v$ が対角化可能で，その固有値がすべて $\mathbf{K}$ に含まれることである．

証明　必要条件であることは明らか．十分条件であることを示そう．r に関する帰納法を用いる．$r=1$ なら明らか．$r \geqq 2$ とする．仮定により

$$V = \bigoplus_{c \in \mathbf{K}} V^c, \qquad V^c = \{v \in V | t_1 v = cv\}$$

と分解される．$\mathfrak{k} = \sum_{i=2}^{r} \mathbf{K} t_i$ とおくとき，各 V^c は V の $U(\mathfrak{k})$ 部分加群である．実際 $\mathfrak{h}$ は可換なので，$v \in V^c, h \in \mathfrak{k}$ とするとき，$t_1 hv = ht_1 v = chv$ となるので，$hv \in V^c$．帰納法の仮定により，

$$V^c = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{k}^*} (V^c)_\mu, \qquad (V^c)_\mu = \{v \in V^c | hv = \mu(h) v \, (h \in \mathfrak{k})\}$$

と分解される．このとき，$\lambda(h_1) = c, \lambda|\mathfrak{k} = \mu$ となる $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に関して，$(V^c)_\mu = V_\lambda$ となるので，主張は明らか．∎

1.56［補題］　V を広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群 とする．W を V の部分 $U(\mathfrak{h})$ 加群とするとき，W および V/W はともに広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群である．さらに V がウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群 ならば，W および V/W もウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群で，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\dim V_\lambda = \dim W_\lambda + \dim(V/W)_\lambda$ が成り立つ．

証明　自然な写像 $\pi : V \to V/W$ $(v \mapsto \overline{v})$ を考える．π は $U(\mathfrak{h})$ 加群の準同型写像なので補題 1.53 により，$\pi(V_\lambda) \subset (V/W)_\lambda$ が任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して成り立つ．したがって $V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ により

$$V/W = \pi(V) = \pi(\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \pi(V_\lambda) \subset \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (V/W)_\lambda \subset V/W.$$

よって補題 1.54 により，V/W は広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群で，$\pi(V_\lambda) = (V/W)_\lambda$ が成り立つ．

次に W が広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群であることを示す．$w \in W$ とする．V は広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群なので，相異なる $\lambda_i \in \mathfrak{h}^* \, (i = 1, \ldots, n)$ と $v_i \in V_{\lambda_i} \, (i = 1, \ldots, n)$ があって $w = \sum_{i=1}^{n} v_i$ と書ける．このとき $v_i \in W$ を示せばよい．$W = \operatorname{Ker} \pi$ に注意する．

$$0 = \pi(w) = \sum_{i=1}^{n} \pi(v_i), \qquad \pi(v_i) \in (V/W)_{\lambda_i}$$

と補題1.54により，$\pi(v_i)=0$ すなわち $v_i \in W$ が従う．よって W も広義のウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群である．このとき，ウェイト空間の定義により，$W_\lambda = V_\lambda \cap W$ も成立する．

V がウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群ならば，V_λ の有限次元性により，$W_\lambda = V_\lambda \cap W$ および $(V/W)_\lambda = \pi(V_\lambda)$ も有限次元なので，W および V/W もウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群である．また π から定まる全射線形写像 $V_\lambda \to (V/W)_\lambda$ の核は W_λ なので $V_\lambda/W_\lambda \cong (V/W)_\lambda$ が成り立つ．よって特に $\dim V_\lambda = \dim W_\lambda + \dim(V/W)_\lambda$ である．∎

$\mathfrak{h}$ を部分リー代数として含むリー代数 $\mathfrak{g}$ が与えられているとする．$\mathfrak{g}$ の随伴表現 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ を $\mathfrak{h}$ に制限して得られる $\mathfrak{h}$ の表現 $(\mathrm{ad}\,|\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ により，$\mathfrak{g}$ を $U(\mathfrak{h})$ 加群と思う．このとき定義により

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{a \in \mathfrak{g} \mid [h,a] = \lambda(h)a \ (h \in \mathfrak{h})\} \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{1.17}$$

である．これに関して次が成り立つ．

1.57 ［**補題**］

(i) $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$．

(ii) V を $U(\mathfrak{g})$ 加群とすると，$\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$\mathfrak{g}_\lambda V_\mu \subset V_{\lambda+\mu}$．

証明　(i) は (ii) を $V = \mathfrak{g}$ の場合に適用して得られるので，(ii) のみ示せばよい．$a \in \mathfrak{g}_\lambda$, $v \in V_\mu$ のとき，$h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$hav = ([h,a] + ah)v = \lambda(h)av + \mu(h)av = (\lambda+\mu)(h)av$$

となるので，$av \in V_{\lambda+\mu}$ がわかる．∎

5. リー代数 $\mathfrak{sl}_2$ の表現

リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の有限次元表現について考察する，ただしこの節では，基礎体 $\mathbf{K}$ の標数は 0 であるとする．

例 1.41 において，各非負整数 n に対して $\mathfrak{g}$ の $(n+1)$ 次元表現 $(\rho_n, V(n))$ が構成され，さらに例 1.45 でそれらが既約表現であることが示されている．我々

の目標は，$\mathfrak{g}$ の任意の有限次元表現が，これらの既に構成済みの既約表現のいくつかの直和と同値になることを示すことである．

以下例 1.41 と同じく $\mathfrak{g}$ の基底

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

を用いる．このとき関係式

$$[h,e] = 2e, \qquad [h,f] = -2f, \qquad [e,f] = h \tag{1.19}$$

が成立している．

1.58［問題］　n を正整数とするとき，包絡代数 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ における以下の公式を示せ：

$$ef^n = f^n e + n(h+n-1)f^{n-1} = f^n e + nf^{n-1}(h-n+1).$$

$\mathfrak{h} = \mathbf{K}h$ は $\mathfrak{g}$ の可換部分リー代数であるが，これに関して本章 4 節の記号を用いることにする．ただし

$$\mathfrak{h}^* \cong \mathbf{K} \quad (\mathfrak{h}^* \ni \lambda \mapsto \lambda(h) \in \mathbf{K})$$

により，$\mathfrak{h}^*$ を $\mathbf{K}$ と同一視する．すなわち，$U(\mathfrak{g})$ 加群 V と $c \in \mathbf{K}$ に対して

$$V_c = \{v \in V | hv = cv\}$$

とおく．したがって，例えば随伴表現に関して

$$\mathfrak{g}_0 = \mathbf{K}h, \qquad \mathfrak{g}_2 = \mathbf{K}e, \qquad \mathfrak{g}_{-2} = \mathbf{K}f \tag{1.20}$$

である．

補題 1.57 から次が従う．

1.59［補題］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 V に対して，次が成立する：

$$hV_c \subset V_c, \quad eV_c \subset V_{c+2}, \quad fV_c \subset V_{c-2}.$$

1.60 [補題]　V を $U(\mathfrak{g})$ 加群とし，$v \in V_c$ $(c \in \mathbf{K})$ が $ev = 0$ を満たすものとする．非負整数 n に対して $v_n = \frac{1}{n!} f^n v \in V$ とおく．このとき

(i) $hv_n = (c - 2n)v_n \quad (n \geqq 0)$.

(ii) $ev_n = (c - n + 1)v_{n-1} \quad (n \geqq 1)$.

(iii) $fv_n = (n + 1)v_{n+1} \quad (n \geqq 0)$.

証明　補題 1.59 により，$v_n \in V_{c-2n}$．よって $hv_n = (c - 2n)v_n$．v_n の定義により，

$$fv_n = \frac{1}{n!} f^{n+1} v = (n + 1)v_{n+1}.$$

また $n \geqq 1$ のとき

$$ev_n = \frac{1}{n} efv_{n-1} = \frac{1}{n}(h + fe)v_{n-1} = \frac{1}{n}((c - 2(n - 1))v_{n-1} + fev_{n-1})$$

である．そこで $ev_n = (c - n + 1)v_{n-1}$ $(n \geqq 1)$ を n に関する帰納法で示そう．$n = 1$ なら $ev_0 = 0$ なので，上式から $ev_1 = cv_0$．$n \geqq 2$ のときには，帰納法の仮定と上式から，

$$\begin{aligned} ev_n =& \frac{1}{n}((c - 2(n - 1))v_{n-1} + (c - n + 2)fv_{n-2}) \\ =& \frac{1}{n}(c - 2(n - 1) + (c - n + 2)(n - 1))v_{n-1} \\ =& (c - n + 1)v_{n-1} \end{aligned}$$

が成立する．　■

1.61 [補題]　V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とし，$v \in V_c$ $(c \in \mathbf{K})$ が $ev = 0$ を満たすものとする．$W = U(\mathfrak{g})v$ とおく．また非負整数 n に対して $v_n = \frac{1}{n!} f^n v \in V$ とおく．

(i) c は非負整数である．

(ii) $n > c$ に対して $v_n = 0$ である

(iii) $\{v_0, \ldots, v_c\}$ は W の基底である．

(iv) $U(\mathfrak{g})$ 加群 W は，$\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 $(\rho_c, V(c))$（例 1.41，例 1.45）に対応する $U(\mathfrak{g})$ 加群と同型である．

証明　補題 1.60(i) により $v_n \in V_{c-2n}$ となるので，v_n たちは相異なる固有値に属する固有空間に含まれる．特に $\{v_n | n \geqq 0,\ v_n \neq 0\}$ は線形独立である．ところが V は有限次元だったので，有限個の n を除いて $v_n = 0$ となる．v_n の定義から，$v_n = 0$ ならば $v_n = v_{n+1} = v_{n+2} = \cdots = 0$ となるので，ある $m \geqq 0$ が定まって $v_0, \ldots, v_m$ は非零で，$v_n = 0\ (n > m)$ が成り立つ．このとき補題 1.60(ii) により，$0 = ev_{m+1} = (c-m)v_m$ なので $c = m$ でなくてはならない．(i)，(ii) が示された．

$v_0, \ldots, v_m$ を基底とする V の部分空間を W' とする．$W' \subset W$ は定義から明らか．補題 1.60 から $hW' \subset W', eW' \subset W', fW' \subset W'$ なので，W' は V の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．したがって $v = v_0 \in W'$ により $W \subset W'$．$W = W'$ が示された．したがって (iii) も成立する．

また補題 1.60 により

$$
\begin{aligned}
&hv_n = (m-2n)v_n \quad (0 \leqq n \leqq m), \\
&ev_n = (m-n+1)v_{n-1} \quad (1 \leqq n \leqq m), \qquad ev_0 = 0, \\
&fv_n = (n+1)v_{n+1} \quad (0 \leqq n \leqq m-1), \qquad fv_m = 0
\end{aligned}
$$

が成立している．よって $w_n = \frac{n!(m-n)!}{m!} v_n$ とおくとき，$\{w_0, \ldots, w_m\}$ はやはり W の基底で，

$$
\begin{aligned}
&hw_n = (m-2n)w_n \quad (0 \leqq n \leqq m), \\
&ew_n = nw_{n-1} \quad (1 \leqq n \leqq m), \qquad ew_0 = 0, \\
&fw_n = (m-n)w_{n+1} \quad (0 \leqq n \leqq m-1), \qquad fw_m = 0
\end{aligned}
$$

が成立する．線形写像 $F: W \to V(m)$ を $F(w_n) = x^n y^{m-n}$ で定めるとき，F は $U(\mathfrak{g})$ 加群の同型写像である．実際，F が線形同型写像であることは明らかなので，$F(uv) = uF(v)\ (u \in U(\mathfrak{g}), v \in W)$ を示せばよい．$U(\mathfrak{g})$ は h, e, f で生成されているので，$u = h, e, f$ のときに示せばよいが，これは例 1.41 により明らか．∎

1.62 ［定理］　V を有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．このとき，ある非負整

数 n が存在して，V は例 1.45 で与えた $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 $(\rho_n, V(n))$ に対応する $U(\mathfrak{g})$ 加群と同型である．

証明　はじめに，一般の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群 $W \neq \{0\}$ に対して，$W_n \neq \{0\}, W_{n+2} = \{0\}$ となる非負整数 n が存在することを示そう．W の基底を 1 つ決めて，対応する $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現の行列表示を $\overline{\rho} : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \mathfrak{gl}_r(\mathbf{K})$ とするとき，非負整数 n であって，n は $\overline{\rho}(h)$ の固有値であり，しかも $n+2$ は固有値でないようなものが存在することを示せばよい．$\mathbf{K}$ の代数閉包を $\overline{\mathbf{K}}$ とする．$\overline{\rho}(h), \overline{\rho}(e), \overline{\rho}(f)$ を $\mathfrak{gl}_r(\overline{\mathbf{K}})$ の元とみることにより，$\overline{\rho}$ は，自然に $\overline{\mathbf{K}}$ 上のリー代数の準同型写像 $\mathfrak{sl}_2(\overline{\mathbf{K}}) \to \mathfrak{gl}_r(\overline{\mathbf{K}})$ に拡張される．したがって，はじめから $\mathbf{K}$ は代数閉体であるとしておいてよい．このとき，$W_c \neq \{0\}$ を満たす $c \in \mathbf{K}$ が少なくとも 1 つ存在する．W は有限次元なので，$W_c \neq \{0\}$ なる c は有限個しか存在しない．特に $W_c \neq \{0\}, W_{c+2} = \{0\}$ を満たす $c \in \mathbf{K}$ が存在する．$w \in W_c \setminus \{0\}$ とする．このとき $ew \in W_{c+2}$ なので，$ew = 0$ である．したがって，補題 1.61 により，c が非負整数であることがわかり，主張が示された．

V を有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．$V_n \neq \{0\}, V_{n+2} = \{0\}$ を満たす非負整数 n をとり $v \in V_n \setminus \{0\}$ とするとき，$ev = 0$ なので，補題 1.61 により，V は $V(n)$ と同型な部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群を含む．したがって V の既約性により，V は $V(n)$ と同型な $U(\mathfrak{g})$ 加群である．■

次に既約とは限らない有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群について考える．$U(\mathfrak{g})$ の元 Ω を

$$\Omega = h^2 + 2h + 4fe \tag{1.21}$$

により定める．

1.63 ［**補題**］　Ω は結合代数 $U(\mathfrak{g})$ の中心に属する．すなわち，任意の $u \in U(\mathfrak{g})$ に対して $u\Omega = \Omega u$ が成り立つ．

証明　$U(\mathfrak{g})$ は h, e, f により生成されているので，$h\Omega = \Omega h, e\Omega = \Omega e, f\Omega = \Omega f$ を示せばよい．$eh = he - [h,e] = he - 2e = (h-2)e$ なので $eh^2 = (h-2)eh =$

$(h-2)^2e$. また $ef = fe + [e,f] = fe + h$ である．よって

$$\begin{aligned} e\Omega &= e(h^2+2h+4fe) = (h-2)^2e + 2(h-2)e + 4(fe+h)e \\ &= ((h-2)^2 + 2(h-2) + 4h + 4fe)e = (h^2+2h+4fe)e \\ &= \Omega e \end{aligned}$$

である．同様の計算により，$h\Omega = \Omega h, f\Omega = \Omega f$ も示すことができる．∎

1.64 [補題]　任意の $v \in V(n)$ に対して $\Omega v = n(n+2)v$ が成り立つ．

証明　$v_0 \in V(n) \setminus \{0\}$ であって $hv_0 = nv_0, ev_0 = 0$ を満たすものがとれる．Ω の定義から $\Omega v_0 = (n^2+2n)v_0 = n(n+2)v_0$ が成り立つ．$U(\mathfrak{g})v_0$ は $V(n)$ の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群であるが，$V(n)$ の既約性により $V(n) = U(\mathfrak{g})v_0$ でなくてはならない．したがって，任意の $v \in V(n)$ は $v = uv_0\ (u \in U(\mathfrak{g}))$ と書ける．このとき補題 1.63 により，

$$\Omega v = \Omega u v_0 = u\Omega v_0 = n(n+2)uv_0 = n(n+2)v$$

が従う．∎

1.65 [定理]　任意の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群は完全可約である．

証明　V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．V の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群の増大列

$$0 = V^0 \subsetneqq V^1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V^r = V \tag{1.22}$$

であって各 V^i/V^{i-1} が既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群となるものがとれる．定理 1.62 により，$V^i/V^{i-1} \cong V(n_i)$ を満たす非負整数 n_i が存在する．よって補題 1.64 により，Ω の V^i/V^{i-1} 上での固有値は $n_i(n_i+2)$ のみである．したがって特に，Ω の V への作用の固有値はすべて $\{n(n+2) | n \in \mathbf{Z},\ n \geqq 0\}$ に属する．よって Ω の V への作用に関する広義固有空間分解

$$\begin{aligned} &V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V(\Omega, n(n+2)), \\ &V(\Omega, n(n+2)) \\ =&\{v \in V |\ \text{十分大きな自然数}\ m\ \text{に対して}\ (\Omega - n(n+2))^m v = 0\} \end{aligned}$$

が得られる．このとき $V(\Omega, n(n+2))$ は部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．実際，$(\Omega - n(n+2))^m v = 0$ とすると，補題 1.63 により任意の $u \in U(\mathfrak{g})$ に対して，$(\Omega - n(n+2))^m uv = u(\Omega - n(n+2))^m v = 0$ が成り立つ．したがってはじめから $V = V(\Omega, n(n+2))$ としておいてよい．このとき (1.22) において，V^i/V^{i-1} はすべて $V(n)$ と同型である．

V の完全可約な部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群のうちで次元が最大になるものを 1 つとり，これを V' とする．このとき $V = V'$ を示せばよい．$V = \{0\}$ なら明らかなので，以下 $V \neq \{0\}$ とする．このとき $V' \neq \{0\}$ である．実際 V の $\{0\}$ とは異なる部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群のうちで次元が最小のものは，明らかに既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群，特に次元が正の完全可約な部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．

そこで $V \neq V'$ と仮定して矛盾を導く．V' を真に含む V の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群のうちで次元が最小のもの V'' をとるとき，V''/V' は既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群になる．h の V'' への作用に関する広義固有空間分解

$$V'' = \bigoplus_{k=0}^{n} V''(h, n-2k),$$

$$V''(h, n-2k)$$

$$=\{v \in V'' |\ \text{十分大きな自然数}\ m\ \text{に対して}\ (h-(n-2k))^m v = 0\}$$

を考える．このとき，

$$hV''(h, n-2k) \subset V''(h, n-2k), \quad eV''(h, n-2k) \subset V''(h, n-2k+2),$$
$$fV''(h, n-2k) \subset V''(h, n-2k-2)$$

が容易に示される．また $\pi : V'' \to V''/V'$ を自然な射影とするとき，

$$\pi(V''(h, n-2k)) \subset (V''/V')(h, n-2k) = (V''/V')_{n-2k},$$

$$V''/V' = \pi(V'') = \sum_{k=0}^{n} \pi(V''(h, n-2k)),$$

$$V''/V' = \bigoplus_{k=0}^{n} (V''/V')_{n-2k}$$

により，$\pi(V''(h, n-2k)) = (V''/V')_{n-2k}$ が成り立つ．そこで $v \in V''(h, n)$ であって，$\pi(v) \neq 0$ となるものをとる．このとき $h\pi(v) = n\pi(v)$ により，

$hv-nv\in V''(h,n)\cap V'=V'_n$ である．$w=hv-nv\in V'_n$ とおくと，$f^{n+1}v\in V''(h,-n-2)=\{0\}$, $ev\in V''(h,n+2)=\{0\}$ と問題 1.58 により

$$0=ef^{n+1}v=(f^{n+1}e+(n+1)f^n(h-n))v=(n+1)f^n w$$

となるが，V' は $V(n)$ の何個かの直和と同型だったので，$V'_n\ni u\mapsto f^n u\in V'_{-n}$ は線形同型写像であり，これから $w=0$ が従う．よって $hv=nv$ が成立する．$W=U(\mathfrak{g})v$ とおく．このとき補題 1.61 により，W は $V(n)$ と同型な部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．$W\cap V'$ は既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群 W の部分加群なので，$W\cap V'\neq\{0\}$ とすると，$W\cap V'=W$ すなわち $W\subset V'$ でなければならないが，これは $v\notin V'$ に矛盾する．よって $W\cap V'=\{0\}$ がわかった．よって $W+V'$ は直和になる．これは V' の取り方に矛盾する．

以上により，$V=V'$ が示された．　■

1.66 [系]　V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とするとき，h の V への作用は対角化可能で，その固有値はすべて整数である．

証明　定理 1.65 により，V が既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群の場合に帰着されるが，このとき主張は定理 1.62 により明らか．　■

一般に F を有限次元ベクトル空間 V の線形変換であって，ベキ零なものとする．すなわち $F^N=0$ となる 正整数 N が存在するとする．このとき F の “指数関数”$\exp(F):V\to V$ が,

$$\exp(F)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F^n$$

で定まる．見かけ上は無限和であるが，F のベキ零性により実質的には有限和として矛盾なく定まる[8]．また V が無限次元の場合でも，V の線形変換 F が局所ベキ零ならば（すなわち，任意の $v\in V$ に対して v を含む V の有限次元部分空間 V_1 であって，$F(V_1)\subset V_1$ でかつ，F の V_1 への制限がベキ零となるものが存在するならば)，V の線形変換 $\exp(F)$ が自然に定まる．

[8] 基礎体 $\mathbf{K}$ が実数体 $\mathbf{R}$ あるいは複素数体 $\mathbf{C}$ の場合には，F がベキ零でなくとも無限和が収束し，任意の線形変換に対して $\exp(F)$ を定義することができるが，ここではそれは扱わない．

1.67 [補題]

(i) F, G が局所ベキ零線形変換で $FG = GF$ のとき，$F + G$ も局所ベキ零線形変換で $\exp(F)\exp(G) = \exp(F + G)$ が成り立つ．

(ii) $\exp(0)$ は恒等変換である．

(iii) 局所ベキ零線形変換 F に対して $\exp(F)$ は全単射で，しかもその逆変換は $\exp(-F)$ により与えられる．

証明　(i) F, G の作用するベクトル空間を V とする．$v \in V$ とする．$V_1 = \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{K} G^m F^n(v)$ は明らかに G の作用で不変であるが，$FG = GF$ なので F の作用でも不変である．v を含む F 不変な有限次元部分空間 V_2 と正整数 N であって $(F|V_2)^N = 0$ となるものが存在するが，$v \in V_2$ なので $F^N(v) = 0$ となる．また同様にして $G^M(v) = 0$ となる正整数 M が存在する．このとき，

$$V_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{K} G^m F^n(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{K} F^n G^m(v)$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{K} F^n G^m(v)$$

となり，V_1 は有限次元である．また $(F|V_1)^N = (G|V_1)^M = 0$ は明らかである．したがって，はじめから F, G は有限次元ベクトル空間上のベキ零線形変換としてよい．

$F^N = G^M = 0$ とする．$FG = GF$ により

$$(F + G)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} F^r G^{n-r}$$

と展開できるが，$n = N + M$ ならば，$0 \leqq r \leqq N + M$ のとき $r \geqq N$ または $n - r \geqq M$ の少なくとも一方が成立するので，$F^r G^{n-r} = 0$ となる．したがって $(F+G)^{N+M} = 0$ である．特に $F+G$ はベキ零である．そこで $\exp(F+G)$ を定義に従って計算すると

$$\exp(F + G) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(F + G)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{r!(n-r)!} F^r G^{n-r}$$
$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} F^r G^s = (\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r}!F^r)(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} G^s) = \exp(F)\exp(G)$$

がわかる．なお上の計算は無限和のままで扱っているが，有限個の項を除いて 0 となっているので，実際には有限和の計算にすぎない．

(ii) は定義から明らかである．(i) において $G=-F$ とすると，(ii) により $\exp(F)\exp(-F)=\mathrm{id}$ となるので (iii) も明らか．■

元に戻って V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．$e^nV_c\subset V_{c+2n}, f^nV_c\subset V_{c-2n}$ なので，e,f は V 上のベキ零線形作用素を定める．したがって V 上の線形変換 $\exp(ae),\exp(af)$ $(a\in\mathbf{K})$ が定まる．そこで V の線形変換 $\tau:V\to V$ を

$$\tau=\exp(e)\exp(-f)\exp(e) \tag{1.23}$$

により定義する．

まず V が随伴表現の表現加群 $\mathfrak{g}=\mathbf{K}h+\mathbf{K}e+\mathbf{K}f$ の場合を考える．

1.68 ［補題］　$\tau:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ はリー代数の自己同型写像で，

$$\tau(h)=-h,\quad \tau(e)=-f,\quad \tau(f)=-e \tag{1.24}$$

が成立する．

証明　定義から

$$\begin{aligned}\tau(e)&=\exp(\mathrm{ad}(e))\exp(-\mathrm{ad}(f))\exp(\mathrm{ad}(e))(e)\\&=\exp(\mathrm{ad}(e))\exp(-\mathrm{ad}(f))(e)=\exp(\mathrm{ad}(e))(e+h-f)\\&=e+(h-2e)-(f+h-e)=-f.\end{aligned}$$

全く同様にして，$\tau(h)=-h,\tau(f)=-e$ も示される．τ がリー代数の自己同型写像であることは，(1.24) から直接示すこともできるが，ここではもう少し一般性のある証明を述べよう．$\exp(\mathrm{ad}(e)),\exp(\mathrm{ad}(-f))$ がリー代数の自己同型写像であることを示せばよい．一般に，リー代数 $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}$ のベキ零線形変換 $F:\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$ であって，

$$F([x,y])=[F(x),y]+[x,F(y)]\qquad (x,y\in\mathfrak{a})$$

を満たすものがあるとき，$\exp(F)$ がリー代数の自己同型写像であることを示せばよい．n に関する帰納法により

$$F^n([x,y])=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}([F^k(x),F^{n-k}(y)])$$

が容易に示される．ここで

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

は 2 項係数を表す．よって

$$\begin{aligned}(\exp(F))([x,y]) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n([x,y]) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} ([F^k(x), F^{n-k}(y)]) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} ([F^k(x), F^{n-k}(y)]) \\ &= [\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} F^k(x), \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} F^r(y)] \\ &= [(\exp(F))(x), (\exp(F))(y)].\end{aligned}$$

$\exp(F)$ がリー代数の準同型写像であることがわかった．$\exp(F)$ が全単射であることは，補題 1.67 で既にわかっている． ∎

1.69［補題］　V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．

(i) 任意の $a \in \mathfrak{g}$ と $v \in V$ に対して $\tau(av) = \tau(a)\tau(v)$.

(ii) 任意の $c \in \mathbf{Z}$ に対して $\tau(V_c) = V_{-c}$.

証明　(i) $x = e$ または $x = -f$ のときに，

$$(\exp(x))(av) = (\exp(\mathrm{ad}(x)))(a)(\exp(x))(v) \qquad (a \in \mathfrak{g}, v \in V)$$

を示せばよい．$x(av) = (\mathrm{ad}(x)(a))v + a(xv)$ なので，n に関する帰納法で，

$$x^n(av) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{ad}(x)^k(a)) x^{n-k} v$$

が示される．これを用いると，補題 1.68 における F が準同型写像であることの証明と全く同様にして，$(\exp(x))(av) = (\exp(\mathrm{ad}(x)))(a)(\exp(x))(v)$ が示される．

(ii) $v \in V_c$ とすると,

$$h\tau(v) = -\tau(h)\tau(v) = -\tau(hv) = -c\tau(v)$$

となり, $\tau(v) \in V_{-c}$ がわかる. ∎

1.70 [問題]　$V = V(n)$ のとき, $\tau(x^i y^{n-i}) = (-1)^{n-i} x^{n-i} y^i$ を示せ. ただし記号は例 1.41 に従う.
(ヒント：直接計算してもできるが, 次の方針でやるほうがもっとスマートである. $a = e$ あるいは $a = -f$ のとき, $a \in \mathfrak{g}$ の $\mathbf{K}[x,y]$ への作用が導分であること（すなわち $a(\varphi\psi) = a(\varphi)\psi + \varphi a(\psi)$ を満たすこと）を用いると, $\exp(a)$ の $\mathbf{K}[x,y]$ への作用は環の同型写像であることがわかる. よって τ の $\mathbf{K}[x,y]$ への作用も環の同型写像である. したがって, 主張は $\tau(x) = y, \tau(y) = -x$ から従う.)

6. 生成元と基本関係式で定まるリー代数

本章 2 節において生成元と基本関係式で定まる結合代数について述べたが, そのリー代数版について解説する.

結合代数の場合は, 関係式をもたない文字 $\{x_i\}_{i\in I}$ で生成される自由結合代数（非可換多項式環）$\mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle$ を基本関係式から定まる両側イデアル $\mathcal{I}$ で割って得られる商結合代数 $A = \mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle / \mathcal{I}$ として, 生成元と基本関係式で定まる結合代数を定めたのであった. リー代数の場合にもこの手順を踏むのであるが, そのためにまず関係式をもたない文字 $\{x_i\}_{i\in I}$ で生成される自由リー代数について述べる. 自由リー代数の構成法としては, より一般性のあるブルバキ [3] 第 1 章の方法のほうが本格的ではあるが, ここでは非可換多項式環を用いる方法を採用することにする.

非可換多項式環 $\mathbf{K}\langle x_i | i \in I\rangle$ をブラケット積 $[x,y] = xy - yx$ によりリー代数と見なし, その中で集合 $\{x_i\}_{i\in I}$ により生成される部分リー代数を $\mathfrak{g}(x_i | i \in I)$ と書くことにする[9].

リー代数 $\mathfrak{g}(x_i | i \in I)$ は次の普遍写像性質を満たし, 文字 $\{x_i\}_{i\in I}$ で生成される**自由リー代数** (free Lie algebra) と呼ばれる.

[9] この記法は一般的なものではない.

1.71［定理］　リー代数 $\mathfrak{g}$ の元の族 $\{a_i\}_{i\in I}$ があるとき，リー代数の準同型写像 $f:\mathfrak{g}(x_i|i\in I)\to\mathfrak{g}$ であって，$f(x_i)=a_i\,(i\in I)$ を満たすものがただ1つ存在する．

証明　$\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ は $\{x_i\}_{i\in I}$ により生成されているので，f が存在すれば一意的なのは明らか．$\mathfrak{g}$ をその包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の部分リー代数と見なす．非可換多項式環 $\mathbf{K}\langle x_i|i\in I\rangle$ から $U(\mathfrak{g})$ への結合代数の準同型写像 $\tilde{f}$ を $\tilde{f}(F)=F|_{x_i=a_i}$ により定める．このとき $\tilde{f}(x_i)=a_i$ である．$\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ は $\{x_i\}_{i\in I}$ により生成されており，しかも $\tilde{f}$ はリー代数の準同型写像でもあるので $\tilde{f}(\mathfrak{g})$ は $\{a_i\}_{i\in I}$ で生成される $U(\mathfrak{g})$ の部分リー代数に含まれる．特に $\mathfrak{g}$ に含まれる．したがって $\tilde{f}$ を $\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ に制限することによりリー代数の準同型写像 $f:\mathfrak{g}(x_i|i\in I)\to\mathfrak{g}$ が定まり，$f(x_i)=a_i\,(i\in I)$ を満たす．■

リー代数 $\mathfrak{g}$ の元の族 $\{a_i\}_{i\in I}$ と $F\in\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ があるとき，$F|_{x_i=a_i}\in\mathfrak{g}$ を $F|_{x_i=a_i}=f(F)$ により定める（$f:\mathfrak{g}(x_i|i\in I)\to\mathfrak{g}$ はリー代数の準同型写像で $f(x_i)=a_i$ を満たすもの）．

いま $\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ の元の族 $\{F_j\}_{j\in J}$ が与えられているとする．$\{F_j\}_{j\in J}$ により生成される $\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ のイデアルを $\mathcal{I}$ とする．$\mathcal{I}$ は

$$[H_1,[H_2,[H_3,[\cdots[H_r,F_j]\cdots]\qquad(H_1,\ldots,H_r\in\mathfrak{g}(x_i|i\in I),\,j\in J)$$

の形の元の有限和の全体からなる．商リー代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(x_i|i\in I)/\mathcal{I}$ における x_i の像を $a_i=\overline{x_i}\in\mathfrak{g}$ で表す．このとき任意の $j\in J$ に対して $F_j|_{x_i=a_i}=0$ が成立している．この $\mathfrak{g}$ を $\{a_i\}_{i\in I}$ により生成され，

$$F_j|_{x_i=a_i}=0\qquad(j\in J)\tag{1.25}$$

を**基本関係式**（fundamental relations）とするリー代数と呼ぶ．これは次の普遍写像性質で特徴づけられる．

1.72［命題］　$\{a_i\}_{i\in I}$ により生成され (1.25) を基本関係式とするリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．リー代数 $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}$ の元の族 $\{b_i\}_{i\in I}$ があって，$F_j|_{x_i=b_i}=0\,(j\in J)$ が成立しているとする．このとき，リー代数の準同型写像 $h:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ であって $h(a_i)=b_i\,(i\in I)$ を満たすものがただ1つ存在する．

証明　$\mathfrak{g}$ は $\{a_i\}_{i\in I}$ により生成されているので，条件を満たす h は存在すれば一意的である．h の存在を示そう．定理 1.71 により，リー代数の準同型写像 $f:\mathfrak{g}(x_i|i\in I)\to\mathfrak{h}$ であって $f(x_i)=b_i$ を満たすものがただ 1 つ存在する．これに関して $f(F_j)=F_j|_{x_i=b_i}=0$ なので $f(\mathcal{I})=0$ が成り立っている（$\mathcal{I}$ は $\{F_j\}_{j\in J}$ により生成される $\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ のイデアル）．したがってリー代数の準同型写像 $h:\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(x_i|i\in I)/\mathcal{I}\to\mathfrak{h}$ が $h(\overline{F})=f(F)$ により矛盾なく定まり，$h(a_i)=b_i\,(i\in I)$ が成り立っている．∎

1.73 [命題]　$\{a_i\}_{i\in I}$ により生成され (1.25) を基本関係式とするリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．(1.25) における $F_j\in\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ を包含関係 $\mathfrak{g}(x_i|i\in I)\subset\mathbf{K}\langle x_i|i\in I\rangle$ により $\mathbf{K}\langle x_i|i\in I\rangle$ の元と思い，$\{\tilde{a}_i\}_{i\in I}$ により生成され

$$F_j|_{x_i=\tilde{a}_i}=0 \qquad (j\in J) \tag{1.26}$$

を基本関係とする結合代数を A とする．このとき，$\mathfrak{g}$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は A と同型である．

証明　命題 1.72 により，リー代数の準同型写像 $f:\mathfrak{g}\to A$ であって $f(a_i)=\tilde{a}_i\,(i\in I)$ を満たすものがただ 1 つ存在する．B を結合代数，$f':\mathfrak{g}\to B$ をリー代数の準同型写像とするとき，結合代数の準同型写像 $h:A\to B$ であって，$h\circ f=f'$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せばよい．$h:A\to B$ を結合代数の準同型写像とするとき，$h\circ f$ と f' はともに $\mathfrak{g}$ から B へのリー代数の準同型写像なので，それらが一致するための必要十分条件は生成元の上で一致することである．$f(a_i)=\tilde{a}_i\,(i\in I)$ だったので，$h\circ f=f'$ となるための必要十分条件は $h(\tilde{a}_i)=f'(a_i)$ が任意の $i\in I$ に対して成り立つことである．f' はリー代数の準同型写像だったので，(1.25) から

$$F_j|_{x_i=f'(a_i)}=0 \qquad (j\in J) \tag{1.27}$$

が，B をリー代数，F_j を $\mathfrak{g}(x_i|i\in I)$ の元と思って成り立つ．したがって (1.27) は，B を結合代数，F_j を $\mathbf{K}\langle x_i|i\in I\rangle$ の元と思っても成り立つ．よって命題 1.21 により $h(\tilde{a}_i)=f'(a_i)\,(i\in I)$ を満たす結合代数の準同型写像 $h:A\to B$ がただ 1 つ存在する．∎

1.74 [例]　$\mathfrak{sl}_3(\mathbf{K})$ の基底 $\{h_1, h_2, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$ を，

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき $e_3 = [e_1, e_2]$, $f_3 = [f_2, f_1]$ なので $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{K})$ は 6 個の元 $h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ により生成されている．また，$1 \leqq i, j \leqq 2$ のとき，$\mathfrak{sl}_3(\mathbf{K})$ において関係式

$$\begin{aligned}
&[h_i, h_j] = 0, \\
&[h_i, e_j] = \begin{cases} 2e_j & (i = j), \\ -e_j & (i \neq j), \end{cases} \\
&[h_i, f_j] = \begin{cases} -2f_j & (i = j), \\ f_j & (i \neq j), \end{cases} \\
&[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \\
&[e_i, [e_i, e_j]] = 0 \qquad (i \neq j), \\
&[f_i, [f_i, f_j]] = 0 \qquad (i \neq j)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

が成立している．$\mathfrak{sl}_3(\mathbf{K})$ が，$\{h_1, h_2, e_1, e_2, f_1, f_2\}$ により生成され (1.28) を基本関係式とするリー代数であることを示そう．

$\Gamma = \{H_1, H_2, E_1, E_2, F_1, F_2\}$ により生成され，関係式 (1.28) において，h_i, e_i, f_i をそれぞれ H_i, E_i, F_i で置き換えて得られる式を基本関係式とするリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．普遍写像性質により，リー代数の準同型写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_3(\mathbf{K})$ であって $f(H_i) = h_i$, $f(E_i) = e_i$, $f(F_i) = f_i$ を満たすものがただ 1 つ存在する．この f が同型写像であることを示せばよい．f の全射性は明らかなので，

$\dim \mathfrak{g} \leqq \dim \mathfrak{sl}_3(\mathbf{K}) = 8$ を示せばよい．したがって，$E_3 = [E_1, E_2]$, $F_3 = [F_2, F_1]$, $\Gamma' = \Gamma \cup \{E_3, F_3\}, V = \sum_{X \in \Gamma'} \mathbf{K}X \subset \mathfrak{g}$ とおくとき，$\mathfrak{g} = V$ を示せばよい．それには，補題 1.12 により，$[\Gamma, V] \subset V$ すなわち $[\Gamma, \Gamma'] \subset V$ を示せばよい．$[\Gamma, \Gamma] \subset V$ は関係式から明らかなので，任意の $X \in \Gamma$ に対して $[X, E_3] \in V$, $[X, F_3] \in V$ が成り立っていることを示せばよい．例えば $X = E_1$ のときは

$$\begin{aligned}
[X, E_3] &= [E_1, [E_1, E_2]] = 0, \\
[X, F_3] &= [E_1, [F_2, F_1]] = [[E_1, F_2], F_1] + [F_2, [E_1, F_1]] \\
&= 0 + [F_2, H_1] = -[H_1, F_2] = -F_2
\end{aligned}$$

となり主張が成立する．その他の場合も同様に確かめられる（詳細は読者に委ねる）．　□

ノート

リー代数は，リー群（連続変換群）における無限小変換のなす代数系として，S. リーにより導入されたものである．本書では，リー群とリー代数の対応に関して述べる余裕がないが，これに関する教科書として，Chevalley[5]，大島・小林 [41]，佐武 [42]，杉浦 [46] をあげておく．

この章で述べたことは，リー代数の教科書ならどれにでも載っているような，基本的なことばかりである．なお，補題 1.26 を用いるポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理（定理 1.24）の証明に関しては，Jacobson [14] を参考にした．

2

カッツ・ムーディ・リー代数

カッツ・ムーディ・リー代数と呼ばれる，一般には無限次元のリー代数を導入し，その基本的性質について述べる．これは，生成元と基本関係式を用いて定義されるので，その実体をすぐには捉えづらいかもしれない．しばらくは抽象的な議論が続くが，その重要でかつ具体的な例は，第3章，第4章において扱うことになる．

1．カルタン行列

以後，本書では $\mathbf{K}$ は標数0の体を表すものとし，ベクトル空間やリー代数などは，すべて基礎体 $\mathbf{K}$ 上定義されたものとする．

これからの目標は，カッツ・ムーディ・リー代数と呼ばれる（一般には無限次元の）リー代数を生成元と基本関係式により定めて，その詳しい性質を調べることであるが，基本関係式を記述するための基礎データとなるカルタン行列に関連することについて，まず説明する．

2.1［定義］ 整数を成分とする正方行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$（I は有限添え字集合[1]）が以下の性質 (CM1)，(CM2)，(CM3) を満たすとき，これを**カルタン行列** (Cartan matrix) という：

(CM1) 任意の $i\in I$ に対して $a_{ii}=2$.

(CM2) $i,j\in I$ で $i\neq j$ ならば $a_{ij}\leqq 0$.

(CM3) $i,j\in I$ に対して，$a_{ij}=0\Leftrightarrow a_{ji}=0$.

---

[1] $I=\{1,2,\ldots,\ell\}$ で A は $\ell\times\ell$ 行列と思っていてもよい．

2.2［例］　$|I|=1$ ならばカルタン行列 は $A=(2)$ のみである．$|I|=2$ ならば，カルタン行列 A は，

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & -m \\ -n & 2 \end{pmatrix} \quad (m,n \text{ は正整数})$$

のいずれかの形になる． □

カルタン行列の有限族 $A^{(r)}=(a_{ij}^{(r)})_{i,j\in I^{(r)}}$ $(r=1,\ldots,n)$ が与えられたとき，$I=\bigsqcup_{r=1}^{n} I^{(r)}$ を添え字集合とする新たなカルタン行列 $A:=\bigoplus_{r=1}^{n} A^{(r)}=(a_{ij})_{i,j\in I}$ が，

$$a_{ij}=\begin{cases} a_{ij}^{(r)} & (i,j\in I^{(r)}) \\ 0 & (i\in I^{(r)},\ j\in I^{(s)},\ r\neq s) \end{cases}$$

により定まる．これを，カルタン行列 $A^{(1)},\ldots,A^{(n)}$ の**直和**（direct sum）と呼ぶ．I の元を，$I^{(1)}$ の元から $I^{(n)}$ の元まで順序よく並べれば

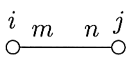
$$A^{(1)}\oplus\cdots\oplus A^{(n)}=\begin{pmatrix} A^{(1)} & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & A^{(n)} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

となっている．

カルタン行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ から以下の手順 (1)，(2) で定まるグラフをその**ディンキン図形**（Dynkin diagram）と呼ぶ：

(1) I の各元 i に対応する頂点を，$\overset{i}{\circ}$ のように，白丸で描く．

(2) $i,j\in I$, $i\neq j$, $a_{ij}a_{ji}\neq 0$ のときには，頂点 $\overset{i}{\circ}$ と頂点 $\overset{j}{\circ}$ を線分で結び，その線分の上に 2 つの正整数 $m=-a_{ij}$ と $n=-a_{ji}$ を

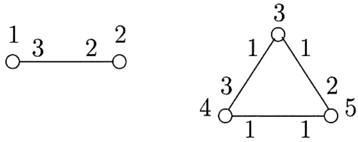


のように配置する．

2.3 [例]　カルタン行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

のディンキン図形は



で与えられる. □

定義から明らかであるが, カルタン行列 はそのディンキン図形から一意的に定まる.

カルタン行列 A のディンキン図形が連結なとき（すなわち任意の 2 頂点が辺を伝って結べるとき）, A は**既約** (irreducible) なカルタン行列 であるという. 一般のカルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ は, そのディンキン図形の連結成分への分解に対応する添え字集合 I の分解を $I = \bigsqcup_{r=1}^{n} I^{(r)}$ とするとき（各 r ごとに, $I^{(r)}$ の元に対応する頂点の全体が 1 つの連結成分を構成するものとする）, n 個の既約なカルタン行列 $A^{(r)} = (a_{ij})_{i,j\in I^{(r)}}$ $(r = 1, \ldots, n)$ の直和と一致する. すなわち $A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)}$ が成り立つ. これを A の**既約分解** (irreducible decomposition) という. また各 $A^{(r)}$ を A の**既約成分** (irreducible component) という.

2.4 [定義]　有限次元ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ と, $\mathfrak{h}$ の線形独立な部分集合 $\{h_i\}_{i\in I}$, および $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{h}, \mathbf{K})$ の線形独立な部分集合 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ からなる 3 つ組み $\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ があって, $A = (\alpha_j(h_i))_{i,j\in I}$ がカルタン行列になるとき, この 3 つ組み Φ のことを, A をカルタン行列とする**基本ルート・データ** (fundamental root data) と呼ぶ. また A を基本ルート・データ Φ に付随するカルタン行列と呼ぶ.

これに関して次の事実が成立する：

2.5［命題*］　$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ をカルタン行列 とする．

(i) $\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ が A をカルタン行列とする基本ルート・データならば $\dim \mathfrak{h} \geqq 2|I| - \mathrm{rank}(A)$ である（ただし $\mathrm{rank}(A)$ は行列 A の階数を表す）．

(ii) A をカルタン行列とする基本ルート・データ $\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ であって，$\dim \mathfrak{h} = 2|I| - \mathrm{rank}(A)$ を満たすものが，同型を除いてただ 1 つ存在する．

ここでは証明は省く（基本的には線形代数の演習問題であるが，きちんと書くとやや面倒である）．本書で主として扱う有限型およびアフィン型のカルタン行列に関しては，それらをカルタン行列とする基本ルート・データを後に具体的に与えることになるので，ここであまり気にする必要はない．

なお，次は明らかであろう．

2.6［命題］　カルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が

$$A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)} \qquad \left(A^{(r)} = (a^{(r)}_{ij})_{i,j \in I^{(r)}}, \quad I = \bigsqcup_{r=1}^{n} I^{(r)} \right)$$

と直和分解されているものとする．また各 $r = 1, \ldots, n$ に対して，$\Phi^{(r)} = (\mathfrak{h}^{(r)}, \{h_i\}_{i \in I^{(r)}}, \{\alpha_i\}_{i \in I^{(r)}})$ は $A^{(r)}$ をカルタン行列にもつ基本ルート・データとする．このとき $\bigoplus_{r=1}^{n} \Phi^{(r)} = (\bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{h}^{(r)}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ は A をカルタン行列にもつ基本ルート・データである．ただし $i \in I^{(r)} \subset I$ に対して，$h_i \in \mathfrak{h}^{(r)}$（$\alpha_i \in (\mathfrak{h}^{(r)})^*$）は自然な埋め込み

$$\mathfrak{h}^{(r)} \hookrightarrow \bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{h}^{(r)}, \qquad \left((\mathfrak{h}^{(r)})^* \hookrightarrow \bigoplus_{r=1}^{n} (\mathfrak{h}^{(r)})^* \cong \left(\bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{h}^{(r)} \right)^* \right)$$

により，$\bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{h}^{(r)}$（$(\bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{h}^{(r)})^*$）の元と思う．

2. カッツ・ムーディ・リー代数

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ をカルタン行列，$\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I},)$ を，A をカルタン行列とする基本ルート・データとする．

$\{a_h\}_{h\in\mathfrak{h}} \sqcup \{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i\}_{i\in I}$ で生成され，次の関係式を基本関係式とするリー代数を $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ とする[2]：

$$a_h + a_{h'} = a_{h+h'} \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.2}$$

$$ca_h = a_{ch} \qquad (h \in \mathfrak{h}, c \in \mathbf{K}), \tag{2.3}$$

$$[a_h, a_{h'}] = 0 \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.4}$$

$$[a_h, \tilde{e}_i] = \alpha_i(h)\tilde{e}_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.5}$$

$$[a_h, \tilde{f}_i] = -\alpha_i(h)\tilde{f}_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.6}$$

$$[\tilde{e}_i, \tilde{f}_j] = \delta_{ij} a_{h_i} \qquad (i, j \in I). \tag{2.7}$$

2.7 [命題]　リー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の自己同型写像 $\tilde{\theta} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ が

$$\tilde{\theta}(a_h) = -a_h, \quad \tilde{\theta}(\tilde{e}_i) = \tilde{f}_i, \quad \tilde{\theta}(\tilde{f}_i) = \tilde{e}_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I) \tag{2.8}$$

で定まる．また $\tilde{\theta}^2 = \mathrm{id}$ が成立する[3].

証明　まず (2.8) を満たすリー代数の準同型写像 $\tilde{\theta} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ が，一意的に存在することを示そう．それには，生成元と基本関係式で定まるリー代数の普遍性質（命題 1.72）により，(2.2),...,(2.7) における $a_h, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ をそれぞれ $-a_h, \tilde{f}_i, \tilde{e}_i$ で置き換えて得られる関係式：

$$(-a_h) + (-a_{h'}) = -a_{h+h'} \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.9}$$

$$c(-a_h) = -a_{ch} \qquad (h \in \mathfrak{h}, c \in \mathbf{K}), \tag{2.10}$$

$$[-a_h, -a_{h'}] = 0 \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.11}$$

$$[-a_h, \tilde{f}_i] = \alpha_i(h)\tilde{f}_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.12}$$

$$[-a_h, \tilde{e}_i] = -\alpha_i(h)\tilde{e}_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.13}$$

$$[\tilde{f}_i, \tilde{e}_j] = \delta_{ij}(-a_{h_i}) \qquad (i, j \in I), \tag{2.14}$$

が，$\tilde{\theta}$ の行き先のリー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ において成り立っていることを示せばよいが，これらの関係式は，$\tilde{\mathfrak{g}}$ における関係式 (2.2),...,(2.7) から直ちに従う．

---

[2] 通常は $\tilde{\mathfrak{g}}$ と書くが，Φ から決まっていることをはっきりさせたい場合には $\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ と書く．

[3] この命題 2.7 およびこの後の補題 2.8 の証明と同様の議論は，今後各所で何度も出てくるであろうが，はじめなのできちんとやっておく．以後はもう少し略した述べ方をするであろう．

次に $\tilde{\theta}^2 = \mathrm{id}$ を示す．$\tilde{\theta}$ はリー代数の準同型写像なので，$\tilde{\theta}^2$ もリー代数の準同型写像である．したがって $\tilde{\theta}^2 = \mathrm{id}$ を示すには，$\tilde{\theta}^2$ と id が $\tilde{\mathfrak{g}}$ の生成元の上で一致することをみればよい．すなわち

$$\tilde{\theta}^2(a_h) = a_h, \quad \tilde{\theta}^2(\tilde{e}_i) = \tilde{e}_i, \quad \tilde{\theta}^2(\tilde{f}_i) = \tilde{f}_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I)$$

を示せばよいが，これは (2.8) から明らか．

$\tilde{\theta}^2 = \mathrm{id}$ から $\tilde{\theta}$ が全単射であることもわかり，主張がすべて示された．■

2.8［補題］　$\{y_i\}_{i\in I}$ を変数とする非可換多項式環 $\mathbf{K}\langle y_i | i \in I\rangle$ を V で表す．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，リー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の表現 $\kappa_\lambda : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(V)$ が，

$$(\kappa_\lambda(\tilde{f}_i))(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) = y_i y_{i_1}\cdots y_{i_r} \qquad (i \in I), \tag{2.15}$$

$$(\kappa_\lambda(a_h))(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) = (\lambda - \sum_{p=1}^{r}\alpha_{i_p})(h) y_{i_1}\cdots y_{i_r} \qquad (h \in \mathfrak{h}), \tag{2.16}$$

$$(\kappa_\lambda(\tilde{e}_i))(1) = 0 \qquad (i \in I), \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}(\kappa_\lambda(\tilde{e}_i))(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) &= \delta_{ii_1}(\kappa_\lambda(a_{h_i}))(y_{i_2}\cdots y_{i_r}) \\ &\quad + y_{i_1}(\kappa_\lambda(\tilde{e}_i))(y_{i_2}\cdots y_{i_r}) \qquad (r > 0,\, i \in I),\end{aligned} \tag{2.18}$$

により一意的に定まる．

証明　$F_i, E_i, A_h \in \mathfrak{gl}(V)\ (i \in I, h \in \mathfrak{h})$ を，

$$F_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) = y_i y_{i_1}\cdots y_{i_r}, \tag{2.19}$$

$$A_h(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) = (\lambda - \sum_{p=1}^{r}\alpha_{i_p})(h) y_{i_1}\cdots y_{i_r}, \tag{2.20}$$

$$E_i(1) = 0, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) &= \delta_{ii_1}A_{h_i}(y_{i_2}\cdots y_{i_r}) \\ &\quad + y_{i_1}E_i(y_{i_2}\cdots y_{i_r}) \qquad (r > 0),\end{aligned} \tag{2.22}$$

により定める（$E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})$ は r に関して帰納的に定まっている）．このとき，$\kappa_\lambda(\tilde{f}_i) = F_i, \kappa_\lambda(a_h) = A_h, \kappa_\lambda(\tilde{e}_i) = E_i (i \in I, h \in \mathfrak{h})$ を満たすリー代数の準同型写像 $\kappa_\lambda : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(V)$ が一意的に存在するというのが，示すべき主張であ

る．したがって，生成元と基本関係式で定まるリー代数の普遍性質（命題 1.72）により，(2.2),...,(2.7) における $a_h, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ をそれぞれ A_h, E_i, F_i で置き換えて得られる次の関係式：

$$A_h + A_{h'} = A_{h+h'} \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.23}$$

$$cA_h = A_{ch} \qquad (h \in \mathfrak{h}, c \in \mathbf{K}), \tag{2.24}$$

$$[A_h, A_{h'}] = 0 \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.25}$$

$$[A_h, E_i] = \alpha_i(h)E_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.26}$$

$$[A_h, F_i] = -\alpha_i(h)F_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.27}$$

$$[E_i, F_j] = \delta_{ij}A_{h_i} \qquad (i, j \in I), \tag{2.28}$$

を示せばよい．

任意の単項式 $y_{i_1} \cdots y_{i_r}$ に対して

$$\begin{aligned}
&(A_h + A_{h'})(y_{i_1} \cdots y_{i_r}) \\
=&A_h(y_{i_1} \cdots y_{i_r}) + A_{h'}(y_{i_1} \cdots y_{i_r}) \\
=&(\lambda - \sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p})(h)y_{i_1} \cdots y_{i_r} + (\lambda - \sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p})(h')y_{i_1} \cdots y_{i_r} \\
=&(\lambda - \sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p})(h + h')y_{i_1} \cdots y_{i_r} \\
=&A_{h+h'}(y_{i_1} \cdots y_{i_r})
\end{aligned}$$

となるので，(2.23) が成り立つ．同様にして (2.24) も示される．また A_h は各単項式に対して定数倍で作用しているので，(2.25) も明らか．さらに

$$\begin{aligned}
&[A_h, F_i](y_{i_1} \cdots y_{i_r}) \\
&\quad = A_h \circ F_i(y_{i_1} \cdots y_{i_r}) - F_i \circ A_h(y_{i_1} \cdots y_{i_r}) \\
&\quad = A_h(y_i y_{i_1} \cdots y_{i_r}) - y_i((\lambda - \sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p})(h)y_{i_1} \cdots y_{i_r}) \\
&\quad = \left((\lambda - \alpha_i - \sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p})(h) - (\lambda - \sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p})(h) \right) y_i y_{i_1} \cdots y_{i_r} \\
&\quad = -\alpha_i(h)y_i y_{i_1} \cdots y_{i_r}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\alpha_i(h)F_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r}),\\
&[E_i, F_j](y_{i_1}\cdots y_{i_r})\\
&\quad = E_i\circ F_j(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) - F_j\circ E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})\\
&\quad = E_i(y_jy_{i_1}\cdots y_{i_r}) - y_jE_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})\\
&\quad = \delta_{ij}A_{h_i}(y_{i_1}\cdots y_{i_r}),
\end{aligned}
$$

から，(2.27), (2.28) も示された．

最後に (2.26) を示そう．

$$
\begin{aligned}
[A_h, E_i](y_{i_1}\cdots y_{i_r}) &= A_h\circ E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) - E_i\circ A_h(y_{i_1}\cdots y_{i_r}),\\
E_i\circ A_h(y_{i_1}\cdots y_{i_r}) &= (\lambda - \sum_{p=1}^{r}\alpha_{i_p})(h)E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})
\end{aligned}
$$

より

$$
A_h(E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})) = (\lambda - \sum_{p=1}^{r}\alpha_{i_p} + \alpha_i)(h)E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})
$$

を示せばよい．したがって A_h の定義により, $E_i(y_{i_1}\cdots y_{i_r})$ が単項式 $y_{j_1}\cdots y_{j_{r-1}}$ であって $\sum_{q=1}^{r-1}\alpha_{j_q} = \sum_{p=1}^{r}\alpha_{i_p} - \alpha_i$ を満たすものの線形結合で書けていることを示せばよい．これは r に関する帰納法を用いて容易に示される． ∎

$\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数であって，$\{a_h\}_{h\in\mathfrak{h}}$，$\{\tilde{e}_i\}_{i\in I}$，$\{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$ で生成されるものを，それぞれ $\tilde{\mathfrak{h}}$，$\tilde{\mathfrak{n}}^+$，$\tilde{\mathfrak{n}}^-$ で表す．

同型写像 $\tilde{\theta}$ に関して次が成立することは，その定義から明らか：

$$
\tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{h}}) = \tilde{\mathfrak{h}}, \quad \tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^+) = \tilde{\mathfrak{n}}^-, \quad \tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^-) = \tilde{\mathfrak{n}}^+. \tag{2.29}
$$

2.9 [定理]

(i) $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}^- \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^+$.

(ii) 写像 $\mathfrak{h}\ni h\mapsto a_h\in\tilde{\mathfrak{h}}$ は線形同型写像である．

(iii) $\tilde{\mathfrak{n}}^+$ は $\{\tilde{e}_i\}_{i\in I}$ で生成される自由リー代数である．

(iv) $\tilde{\mathfrak{n}}^-$ は $\{\tilde{f}_i\}_{i\in I}$ で生成される自由リー代数である．

証明　以下 $[x_1, x_2, \ldots, x_r] := [x_1, [x_2, \ldots, [x_{r-1}, x_r] \cdots]$ なる記法を用いる．

はじめに，補題 2.8 の κ_λ に関して，

$$(\kappa_\lambda([\tilde{f}_{i_1}, \ldots, \tilde{f}_{i_r}]))(v) = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}]v \qquad (v \in V = \mathbf{K}\langle y_i | i \in I\rangle) \quad (2.30)$$

が成り立つことを示そう．$r = 1$ なら明らか．$r > 1$ で $r - 1$ まで主張が成立するとすると，

$$\begin{aligned}
&(\kappa_\lambda([\tilde{f}_{i_1}, \ldots, \tilde{f}_{i_r}]))(v) \\
=&(\kappa_\lambda(\tilde{f}_{i_1}) \circ \kappa_\lambda([\tilde{f}_{i_2}, \ldots, \tilde{f}_{i_r}]))(v) - (\kappa_\lambda([\tilde{f}_{i_2}, \ldots, \tilde{f}_{i_r}]) \circ \kappa_\lambda(\tilde{f}_{i_1}))(v) \\
=&y_{i_1}[y_{i_2}, \ldots, y_{i_r}]v - [y_{i_2}, \ldots, y_{i_r}]y_{i_1}v \\
=&[y_{i_1}[y_{i_2}, \ldots, y_{i_r}]]v.
\end{aligned}$$

よって (2.30) が示された．

線形写像 $\psi : \tilde{\mathfrak{n}}^- \to V$ を $\psi(u) = (\kappa_\lambda(u))(1)$ で定める．また $\{z_i\}_{i \in I}$ で生成される自由リー代数 $\mathfrak{g}(z_i|i \in I)$ から $\tilde{\mathfrak{n}}^-$ への全射準同型写像 $\varphi : \mathfrak{g}(z_i|i \in I) \to \tilde{\mathfrak{n}}^-$ を $z_i \mapsto \tilde{f}_i$ で定める．このとき，(2.30) により，

$$(\psi \circ \varphi)([z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}]) = [y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}]$$

となるが，これは $\psi \circ \varphi$ が自由リー代数の同型 $\mathfrak{g}(z_i|i \in I) \cong \mathfrak{g}(y_i|i \in I)$ を引き起こすことを意味する（$V = \mathbf{K}\langle y_i|i \in I\rangle$ 中で $\{y_i\}_{i \in I}$ で生成される部分リー代数が，自由リー代数 $\mathfrak{g}(y_i|i \in I)$ であった）．特に，$\psi \circ \varphi$ は 単射，よって φ も単射である．したがって $\varphi : \mathfrak{g}(z_i|i \in I) \to \tilde{\mathfrak{n}}^-$ はリー代数の同型写像，また $\psi : \tilde{\mathfrak{n}}^- \to V$ は単射線形写像である．特に (iv) が示された．

このとき (iii) は (iv) と (2.29) から明らかである．

写像 $\mathfrak{h} \ni h \mapsto a_h \in \tilde{\mathfrak{h}}$ が全射な線形写像であることを示そう．線形性は関係式 (2.2)，(2.3) から明らか．$\tilde{\mathfrak{h}}$ は $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ ($x_i \in \{a_h|h \in \mathfrak{h}\}$) の形の元の線形結合の全体からなるが（補題 1.12），関係式 (2.4) により，実際には $\{a_h|h \in \mathfrak{h}\}$ の元の線形結合の全体と一致する．さらに，$h^1, \ldots, h^r \in \mathfrak{h}$, $c_1, \ldots, c_r \in \mathbf{K}$ のとき，関係式 (2.2)，(2.3) により，

$$c_1 a_{h^1} + \cdots + c_r a_{h^r} = a_{c_1 h^1 + \cdots + c_r h^r}$$

となるので，$\mathfrak{h} \ni h \mapsto a_h \in \tilde{\mathfrak{h}}$ は全射である．

$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$ を示そう．$\Gamma = \{a_h\}_{h\in\mathfrak{h}} \sqcup \{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i\}_{i\in I}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ の生成元の集合とする．$\tilde{\mathfrak{g}}$ は $[x_1, x_2, \ldots, x_r]$ $(x_i \in \Gamma)$ の形の元の線形結合の全体からなるので，$[x_1, x_2, \ldots, x_r] \in \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$ $(x_i \in \Gamma)$ を示せばよい．よって r に関する帰納法により，任意の $x \in \Gamma$ に対して

$$[x, \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$$

を示せばよい．

$x = a_h$ $(h \in \mathfrak{h})$ のとき：関係式 (2.4) により，$[a_h, \tilde{\mathfrak{h}}] = 0$ である．$\tilde{\mathfrak{n}}^-$ は $[\tilde{f}_{i_1}, \tilde{f}_{i_2}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}]$ の形の元の線形結合の全体からなるが，

$$\begin{aligned}[a_h, [\tilde{f}_{i_1}, \tilde{f}_{i_2}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}]] &= \sum_{q=1}^{p} [\tilde{f}_{i_1}, \ldots, [a_h, \tilde{f}_{i_q}], \ldots, \tilde{f}_{i_p}] \\ &= -\,(\sum_{q=1}^{p} \alpha_{i_q})(h)[\tilde{f}_{i_1}, \tilde{f}_{i_2}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}]\end{aligned}$$

により，$[a_h, \tilde{\mathfrak{n}}^-] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^-$ である．したがって

$$[a_h, \tilde{\mathfrak{n}}^+] = [-\tilde{\theta}(a_h), \tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^-)] = \tilde{\theta}([a_h, \tilde{\mathfrak{n}}^-]) \subset \tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^-) = \tilde{\mathfrak{n}}^+.$$

以上により，$[a_h, \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$ が示された．

$x = \tilde{e}_i$ $(i \in I)$ のとき：$\tilde{\mathfrak{n}}^+$ の定義から $[\tilde{e}_i, \tilde{\mathfrak{n}}^+] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^+$．関係式 (2.5) により，$[\tilde{e}_i, \tilde{\mathfrak{h}}] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^+$．また関係式 (2.7) により，$[\tilde{e}_i, \tilde{f}_j] = \delta_{ij} a_{h_i} \in \tilde{\mathfrak{h}}$．$r \geqq 2$ ならば，

$$\begin{aligned}&[\tilde{e}_i, [f_{i_1}, \ldots, f_{i_p}]] \\ &= \sum_{q=1}^{p} \delta_{i,i_q} [\tilde{f}_{i_1}, \ldots, \tilde{f}_{i_{q-1}}, a_{h_i}, \tilde{f}_{i_{q+1}}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}] \\ &= \sum_{q=1}^{p-1} \delta_{i,i_q} [\tilde{f}_{i_1}, \ldots, \tilde{f}_{i_{q-1}}, [a_{h_i}, \tilde{f}_{i_{q+1}}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}]] \\ &\qquad + \delta_{i,i_p} [\tilde{f}_{i_1}, \ldots, \tilde{f}_{i_{p-2}}, [\tilde{f}_{i_{p-1}} a_{h_i}]]\end{aligned}$$

であるが，

$$[a_{h_i}, \tilde{f}_{i_{q+1}}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}], [\tilde{f}_{i_{p-1}} a_{h_i}] \in [a_{h_i}, \tilde{\mathfrak{n}}^-] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^-$$

により，$[\tilde{e}_i, [\tilde{f}_{i_1}, \ldots, \tilde{f}_{i_p}]] \in \tilde{\mathfrak{n}}^-$ となる．以上により，$[\tilde{e}_i, \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$ が示された．

$x = \tilde{f}_i\,(i \in I)$ のとき：命題 2.7 の $\tilde{\theta}$ を用いて，

$$[\tilde{f}_i, \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+] = [\tilde{\theta}(\tilde{e}_i), \tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+)] = \tilde{\theta}([\tilde{e}_i, \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+])$$
$$\subset \tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+) = \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$$

がわかる．

以上により，$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$ がわかった．

$u^{\pm} \in \tilde{\mathfrak{n}}^{\pm}, h \in \mathfrak{h}$ で $u^- + a_h + u^+ = 0$ が成り立っているとする．このとき

$$0 = (\kappa_\lambda(u^- + a_h + u^+))(1) = \psi(u^-) + \lambda(h)1 \tag{2.31}$$

が成り立つ．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ は任意なので，特に $\lambda = 0$ として $\psi(u^-) = 0$ を得るが，$\psi : \tilde{\mathfrak{n}}^- \to V$ の単射性は既にわかっているので，$u^- = 0$ が従う．このとき再び (2.31) により，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\lambda(h) = 0$．したがって $h = 0$，特に $a_h = 0$．$u^- = a_h = 0$ より $u^+ = 0$ もわかる．これで $\tilde{\mathfrak{n}}^- + \tilde{\mathfrak{h}} + \tilde{\mathfrak{n}}^+$ が直和であることがわかり，(i) が示された．

また (2.31) を用いる上の議論の中で，$a_h = 0$ ならば $h = 0$ となることも示されており，(ii) も成立することがわかった．■

定理 2.9(ii) により，$\tilde{\mathfrak{h}}$ を $\mathfrak{h}$ と同一視することにし，以後 $a_h\,(h \in \mathfrak{h})$ を単に h と書くことにする．$\mathfrak{h}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の可換部分リー代数である．随伴作用により $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $U(\mathfrak{h})$ 加群と思うとき，

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \mathrm{ad}(h)(x) = \lambda(h)x\,(h \in \mathfrak{h})\} \tag{2.32}$$

が成り立つ（第 1 章 4 節を参照）．$\tilde{\mathfrak{g}}$ の定義関係式により

$$\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{g}}_0, \qquad \tilde{e}_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_i}, \qquad \tilde{f}_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha_i} \qquad (i \in I) \tag{2.33}$$

である．したがって補題 1.57(i) により，

$$\begin{aligned}&[\tilde{f}_{i_1}, [\tilde{f}_{i_2}, \ldots, [\tilde{f}_{i_{r-1}}, \tilde{f}_{i_r}] \cdots] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{-\sum_{p=1}^r \alpha_{i_p}}\\ &[\tilde{e}_{i_1}, [\tilde{e}_{i_2}, \ldots, [\tilde{e}_{i_{r-1}}, \tilde{e}_{i_r}] \cdots] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{\sum_{p=1}^r \alpha_{i_p}}\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる．

$\mathfrak{h}^*$ の部分集合 Q，Q^+ を

$$Q = \sum_{i \in I} \mathbf{Z}\alpha_i, \qquad Q^+ = \sum_{i \in I} \mathbf{Z}_{\geqq 0}\alpha_i \tag{2.35}$$

で定める．$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ の線形独立性から，$\sum_{i\in I} m_i\alpha_i \in Q$ と $\sum_{i\in I} n_i\alpha_i \in Q$ は，$(m_i)_{i\in I} \neq (n_i)_{i\in I}$ ならば，相異なることを注意しておく．$\alpha = \sum_{i\in I} m_i\alpha_i \in Q$ に対して，その高さ $\mathrm{ht}(\alpha)$ を

$$\mathrm{ht}(\alpha) = \sum_{i\in I} m_i \tag{2.36}$$

により定める．このとき

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \{0\} \qquad (\lambda \notin Q^+ \cup (-Q^+)), \tag{2.37}$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{h}, \tag{2.38}$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \sum_{\sum_{p=1}^r \alpha_{i_p} = \alpha} \mathbf{K}[\tilde{e}_{i_1}, [\tilde{e}_{i_2}, \ldots, [\tilde{e}_{i_{r-1}}, \tilde{e}_{i_r}] \cdots] \quad (\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}), \tag{2.39}$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} = \sum_{\sum_{p=1}^r \alpha_{i_p} = \alpha} \mathbf{K}[\tilde{f}_{i_1}, [\tilde{f}_{i_2}, \ldots, [\tilde{f}_{i_{r-1}}, \tilde{f}_{i_r}] \cdots] \quad (\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}), \tag{2.40}$$

$$\tilde{\mathfrak{n}}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in Q^+, \alpha \neq 0} \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha} \tag{2.41}$$

が成り立つ．実際，(2.37),...,(2.40) の右辺を，それぞれ $\tilde{\mathfrak{g}}'_\lambda$ $(\lambda \notin Q^+ \cup (-Q^+))$，$\tilde{\mathfrak{g}}'_0$，$\tilde{\mathfrak{g}}'_\alpha$ $(\alpha \in Q^+ \setminus \{0\})$，$\tilde{\mathfrak{g}}'_{-\alpha}$ $(\alpha \in Q^+ \setminus \{0\})$ とおくとき，(2.33)，(2.34) により $\tilde{\mathfrak{g}}'_\lambda \subset \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ が成り立つ．また定理 2.9(i) により $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \tilde{\mathfrak{g}}'_\lambda$ であるが，補題 1.54 により，$\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ は直和なので，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda = \tilde{\mathfrak{g}}'_\lambda$ でかつ $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \tilde{\mathfrak{g}}'_\lambda$ は直和となる．以上から (2.37),...,(2.41) は明らか．

各 $\alpha \in Q^+$ に対して $\sum_{p=1}^r \alpha_{i_p} = \alpha$ を満たす I の元の列 $(i_1, \ldots, i_r)$ は有限個しか存在しないので，任意の $\alpha \in Q^+$ に対して

$$\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha} < \infty \tag{2.42}$$

が成立している．よって $\tilde{\mathfrak{g}}$ はウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群である．

また同型写像 $\tilde{\theta}$ に関して

$$\tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) = \tilde{\mathfrak{g}}_{-\lambda} \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{2.43}$$

が成り立つ．実際，$a \in \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda, h \in \mathfrak{h}$ とすると，

$$[h, \tilde{\theta}(a)] = \tilde{\theta}([\tilde{\theta}^{-1}(h), a]) = -\tilde{\theta}([h, a]) = -\lambda(h)\tilde{\theta}(a)$$

なので，$\tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{-\lambda}$．また $\tilde{\theta}^2 = \mathrm{id}$ により，$\tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda) \supset \tilde{\theta}^2(\tilde{\mathfrak{g}}_{-\lambda}) = \tilde{\mathfrak{g}}_{-\lambda}$ もわかる．

2.10 [命題]　$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ のイデアル $\mathfrak{r}$ であって $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ を満たすもののうちで，最大のもの $\mathfrak{r}(\Phi)$ が（ただ 1 つ）存在する．また $\mathfrak{r}^{\pm}(\Phi) = \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{\pm}$ とおくとき，$\mathfrak{r}(\Phi) = \mathfrak{r}^{-}(\Phi) \oplus \mathfrak{r}^{+}(\Phi)$ で，しかも $\mathfrak{r}^{+}(\Phi)$ と $\mathfrak{r}^{-}(\Phi)$ はともに $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルである．さらに $\tilde{\theta}(\mathfrak{r}(\Phi)) = \mathfrak{r}(\Phi), \tilde{\theta}(\mathfrak{r}^{\pm}(\Phi)) = \mathfrak{r}(^{\mp}(\Phi))$ が成り立つ．

証明　一般に $\mathfrak{r}$ を $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルとすると，$\mathfrak{r}$ はウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の部分 $U(\mathfrak{h})$ 加群なので，やはりウェイト $U(\mathfrak{h})$ 加群である（補題 1.56）．したがって $\mathfrak{r} = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*}(\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda \cap \mathfrak{r})$ が成り立つ．よって (2.37),...,(2.41) により $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{-}) \oplus (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{+})$ となる．特に $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ ならば，

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{-}) \oplus (\mathfrak{r} \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{+}) \subset \tilde{\mathfrak{n}}^{-} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^{+}$$

が成り立つ．したがって $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアル $\mathfrak{r}$ であって $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ を満たすものすべてにわたる和 $\sum_{\mathfrak{r}} \mathfrak{r} \subset \tilde{\mathfrak{n}}^{-} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^{+}$ を考えると，これが求める $\mathfrak{r}(\Phi)$ になる．このとき $\mathfrak{r}(\Phi) = \mathfrak{r}^{-}(\Phi) \oplus \mathfrak{r}^{+}(\Phi)$ となることもいまの議論から明らか．また $\tilde{\theta}$ はリー代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ の自己同型で $\tilde{\theta}(\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm}) = \tilde{\mathfrak{n}}^{\mp}$ を満たしているので，$\tilde{\theta}(\mathfrak{r}(\Phi)) = \mathfrak{r}(\Phi), \tilde{\theta}(\mathfrak{r}^{\pm}(\Phi)) = \mathfrak{r}(^{\mp}(\Phi))$ は明らか．

$\mathfrak{r}^{-}(\Phi)$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルであることを示そう．上の議論から，

$$\mathfrak{r}^{-}(\Phi) = \bigoplus_{\alpha \in Q^{+}, \alpha \neq 0} (\mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha})$$

なので，$x \in \mathfrak{h} \cup \{\tilde{e}_i, \tilde{f}_i\}_{i \in I}$ と任意の $\alpha \in Q^{+} \setminus \{0\}$ に対して，$[x, \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{n}}^{-}$ となることを示せばよいが，$\mathfrak{r}(\Phi)$ がイデアルであることから $[x, \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{r}(\Phi)$ は明らか．したがって $[x, \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}] \subset \tilde{\mathfrak{n}}^{-}$ を示せばよい．$x \in \mathfrak{h} \cup \{\tilde{f}_i\}_{i \in I}$ のときは明らかなので，$x = \tilde{e}_i$ とする．$[\tilde{e}_i, \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha+\alpha_i}$ なので $[\tilde{e}_i, \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}] \neq \{0\}$ とすると，$\alpha - \alpha_i \in (Q^{+} \cup (-Q^{+})) \setminus \{0\}$ でなければならない．ところが，$\alpha \in Q^{+} \setminus \{0\}$ だったので，$\alpha = \sum_{j \in I} n_j \alpha_j$ ($n_j \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}, \sum_j n_j > 0$) と書ける．したがって，$\alpha - \alpha_i \in (-Q^{+}) \setminus \{0\}$ となることはあり得ない．よって $\alpha - \alpha_i \in Q^{+} \setminus \{0\}$．したがって $[\tilde{e}_i, \mathfrak{r}(\Phi) \cap \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha+\alpha_i} \subset \tilde{\mathfrak{n}}^{-}$．以上で $\mathfrak{r}^{-}(\Phi)$ が $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルであることがわかった．

また $\tilde{\theta}$ は $\tilde{\mathfrak{g}}$ の自己同型なので $\mathfrak{r}^+(\Phi) = \tilde{\theta}(\mathfrak{r}^-(\Phi))$ も $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアルになる． ∎

2.11［命題］　$i, j \in I, i \neq j$ のとき $\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ において

$$\mathrm{ad}(\tilde{e}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{e}_j),\ \mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j) \in \mathfrak{r}(\Phi) \qquad (i \neq j)$$

が成り立つ（$i \neq j$ なので $a_{ij} \leqq 0$ に注意せよ）．

証明　$d_{ij} = \mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j) \in \tilde{\mathfrak{g}}$ $(i, j \in I, i \neq j)$ とおく．まず次を示す．

$$[\tilde{e}_k, d_{ij}] = 0 \qquad (i, j, k \in I, i \neq j). \tag{2.44}$$

$k \notin \{i, j\}$ のときは明らか．$k = j$ とすると，$[\tilde{e}_j, \tilde{f}_i] = 0$ より

$$[\tilde{e}_j, d_{ij}] = \mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}([\tilde{e}_j, \tilde{f}_j]) = \mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(h_j) = a_{ji}\,\mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{-a_{ij}}(\tilde{f}_i)$$

となる．$a_{ij} = 0$ ならば $a_{ji} = 0$ なので $[\tilde{e}_j, d_{ij}] = 0$．また $a_{ij} < 0$ ならば $-a_{ij} > 0$ だが，$\mathrm{ad}(\tilde{f}_i)(\tilde{f}_i) = [\tilde{f}_i, \tilde{f}_i] = 0$ により，やはり $[\tilde{e}_j, d_{ij}] = 0$．$k = i$ のときを考える．関係式

$$[h_i, \tilde{e}_i] = 2\tilde{e}_i, \qquad [h_i, \tilde{f}_i] = -2\tilde{f}_i, \qquad [\tilde{e}_i, \tilde{f}_i] = h_i$$

によりリー代数の準同型写像 $\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \tilde{\mathfrak{g}}$ が，

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto h_i, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \tilde{e}_i, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \tilde{f}_i$$

により定まる．$\mathrm{ad} : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\tilde{\mathfrak{g}})$ もリー代数の準同型写像なので，$\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現 $\mathrm{ad} \circ \varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \mathfrak{gl}(\tilde{\mathfrak{g}})$ が得られた．これに関して，

$$((\mathrm{ad} \circ \varphi)(h))(\tilde{f}_j) = [h_i, \tilde{f}_j] = -a_{ij}\tilde{f}_j, \qquad ((\mathrm{ad} \circ \varphi)(e))(\tilde{f}_j) = [\tilde{e}_i, \tilde{f}_j] = 0$$

が成り立っている．したがって，補題 1.60(ii) により，

$$[\tilde{e}_i, d_{ij}] = ((\mathrm{ad} \circ \varphi)(e))((\mathrm{ad} \circ \varphi)(f))^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j) = 0.$$

以上により (2.44) が示された．

そこで $d_{ij} \in \mathfrak{r}^-(\Phi)$ を示す．それには d_{ij} を含む最小の $\tilde{\mathfrak{g}}$ のイデアル $\mathrm{ad}(U(\tilde{\mathfrak{g}}))(d_{ij})$ が $\tilde{\mathfrak{n}}^-$ に含まれることを示せばよい[4]．ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理と定理 2.9(i) により，

$$\begin{aligned}U(\tilde{\mathfrak{g}}) &= U(\tilde{\mathfrak{n}}^-)U(\mathfrak{h})U(\tilde{\mathfrak{n}}^+)\\ &= \{\sum_i x_i y_i z_i\,(\text{有限和})\,|\,x_i \in U(\tilde{\mathfrak{n}}^-), y_i \in U(\mathfrak{h}), z_i \in U(\tilde{\mathfrak{n}}^+)\}\end{aligned}$$

であるが，(2.44) により $\mathrm{ad}(U(\tilde{\mathfrak{n}}^+))(d_{ij}) = \mathbf{K}d_{ij}$．また $h \in \mathfrak{h}$ に対して $\mathrm{ad}(h)(d_{ij}) \in \mathbf{K}d_{ij}$ なので，やはり $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{h}))(d_{ij}) = \mathbf{K}d_{ij}$．よって

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(U(\tilde{\mathfrak{g}}))(d_{ij}) &= \mathrm{ad}(U(\tilde{\mathfrak{n}}^-))\,\mathrm{ad}(U(\mathfrak{h}))\,\mathrm{ad}(U(\tilde{\mathfrak{n}}^+))(d_{ij})\\ &= \mathrm{ad}(U(\tilde{\mathfrak{n}}^-))(d_{ij}) \subset \tilde{\mathfrak{n}}^-\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j) = d_{ij} \in \mathfrak{r}^-(\Phi)$ が示された．

このとき $\tilde{\theta}(\mathfrak{r}^-(\Phi)) = \mathfrak{r}^+(\Phi)$ なので

$$\mathrm{ad}(\tilde{e}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{e}_j) = \tilde{\theta}(\mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j)) \in \tilde{\theta}(\mathfrak{r}^-(\Phi)) = \mathfrak{r}^+(\Phi).$$

∎

$\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ の部分集合

$$\begin{aligned}&\{\mathrm{ad}(\tilde{e}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{e}_j)|i,j \in I, i \neq j\},\\ &\{\mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j)|i,j \in I, i \neq j\},\\ &\{\mathrm{ad}(\tilde{e}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{e}_j),\ \mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j)|i,j \in I, i \neq j\},\end{aligned}$$

により生成される $\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ のイデアルをそれぞれ $\mathfrak{r}_0^+(\Phi), \mathfrak{r}_0^-(\Phi), \mathfrak{r}_0(\Phi)$ とおく．命題 2.11 により

$$\mathfrak{r}_0^{\pm}(\Phi) \subset \mathfrak{r}^{\pm}(\Phi), \quad \mathfrak{r}_0(\Phi) \subset \mathfrak{r}(\Phi), \tag{2.45}$$

$$\mathfrak{r}_0(\Phi) = \mathfrak{r}_0^+(\Phi) \oplus \mathfrak{r}_0^-(\Phi), \tag{2.46}$$

$$\tilde{\theta}(\mathfrak{r}_0^{\pm}(\Phi)) = \mathfrak{r}_0^{\mp}(\Phi) \tag{2.47}$$

---

[4] 混乱を避けるために，$\tilde{\mathfrak{g}}$ の $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上の随伴表現により $\tilde{\mathfrak{g}}$ を $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ 加群と思うときには，$u \in U(\tilde{\mathfrak{g}})$ の $a \in \tilde{\mathfrak{g}}$ への作用を，ua と書かずに $\mathrm{ad}(u)(a)$ と書く．したがって $u = a_1 \cdots a_n$ $(a_i \in \tilde{\mathfrak{g}})$ ならば $\mathrm{ad}(u)(a) = (\mathrm{ad}(a_1) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(a_n))(a)$ である．

が成立する．

2.12［定義］　カルタン行列 A に対して，リー代数 $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi), \mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ を

$$\mathfrak{g}_{\min}(\Phi) = \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)/\mathfrak{r}(\Phi), \qquad \mathfrak{g}_{\max}(\Phi) = \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)/\mathfrak{r}_0(\Phi)$$

により定める．

定義から，$\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ は $\{a_h\}_{h\in\mathfrak{h}} \sqcup \{e_i, f_i\}_{i\in I}$ で生成され，次の関係式を基本関係式とするリー代数である．

$$a_h + a_{h'} = a_{h+h'} \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.48}$$

$$ca_h = a_{ch} \qquad (h \in \mathfrak{h}, c \in \mathbf{K}), \tag{2.49}$$

$$[a_h, a_{h'}] = 0 \qquad (h, h' \in \mathfrak{h}), \tag{2.50}$$

$$[a_h, e_i] = \alpha_i(h)e_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.51}$$

$$[a_h, f_i] = -\alpha_i(h)f_i \qquad (h \in \mathfrak{h}, i \in I), \tag{2.52}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}a_{h_i} \qquad (i, j \in I), \tag{2.53}$$

$$\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 \qquad (i, j \in I, i \neq j), \tag{2.54}$$

$$\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \qquad (i, j \in I, i \neq j). \tag{2.55}$$

ここで $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ における像を e_i, f_i と書いた．

実は，次の事実が知られている．

2.13［定理*］(ギャバー・カッツ [9])　Φ に付随するカルタン行列が対称化可能（定義 2.41 参照）ならば，$\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$ のイデアル $\mathfrak{r}(\Phi)$ は

$$\{\mathrm{ad}(\tilde{e}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{e}_j),\ \mathrm{ad}(\tilde{f}_i)^{1-a_{ij}}(\tilde{f}_j) | i, j \in I, i \neq j\}$$

により生成される．したがって $\mathfrak{r}(\Phi) = \mathfrak{r}_0(\Phi), \mathfrak{r}^{\pm}(\Phi) = \mathfrak{r}_0^{\pm}(\Phi)$ が成立し，この場合，リー代数 $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ と $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ は実は同じものである．

ギャバー・カッツの証明は初等的ではあるが，わかりやすくはない．本書では，Φ が有限型およびアフィン型と呼ばれる特別なカルタン行列の場合にのみ，定理*2.13 の証明を述べる．

本来は $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ と $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ とを区別する必要があるが，以下の議論はどちらでも全く同様に進行するので，$\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ と $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ のいずれかを表す記号として $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ を用い，これを基本ルート・データ Φ に付随する**カッツ・ムーディ・リー代数**（Kac-Moody Lie algebra）と呼ぶ．

$\mathfrak{r}(\Phi) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{r}_0(\Phi) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ なので $\mathfrak{h} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ の合成写像 $\iota : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は単射である．したがってその像 $\iota(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ と同型な可換部分リー代数になる．以下 $\iota(\mathfrak{h})$ も ι により $\mathfrak{h}$ と同一視することにし，$\mathfrak{h} = \iota(\mathfrak{h})$ を $\mathfrak{g}$ の**カルタン部分代数**（Cartan subalgebra）と呼ぶ．

$i \in I$ に対して $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \tilde{\mathfrak{g}}$ の $\mathfrak{g}$ における像を，それぞれ e_i, f_i で表す．$\{e_i\}_{i\in I}$ で生成される部分リー代数を $\mathfrak{n}^+$，$\{f_i\}_{i\in I}$ で生成される部分リー代数を $\mathfrak{n}^-$ とする．定義から次が成立する．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \tag{2.56}$$

$$\mathfrak{n}^\pm \cong \begin{cases} \tilde{\mathfrak{n}}^\pm/\mathfrak{r}^\pm(\Phi) & (\mathfrak{g}(\Phi) = \mathfrak{g}_{\min}(\Phi)), \\ \tilde{\mathfrak{n}}^\pm/\mathfrak{r}_0^\pm(\Phi) & (\mathfrak{g}(\Phi) = \mathfrak{g}_{\max}(\Phi)). \end{cases} \tag{2.57}$$

この (2.56) を $\mathfrak{g}$ の**3 角分解**（triangular decomposition）と呼ぶことがある．

$\mathfrak{g}$ を随伴作用に関する $U(\mathfrak{h})$ 加群とみて，$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{x \in \mathfrak{g} |\, \mathrm{ad}(h)(x) = \lambda(h)x \ (h \in \mathfrak{h})\}$$

とおく．補題 1.57 により

$$[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu} \qquad (\lambda,\, \mu \in \mathfrak{h}^*) \tag{2.58}$$

が成立する．自然な全射 $\tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ における $\tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ の像を $\mathfrak{g}'_\lambda (\subset \mathfrak{g})$ とおくと，定義から明らかに $\mathfrak{g}'_\lambda \subset \mathfrak{g}_\lambda$ が成り立つ．また $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \tilde{\mathfrak{g}}_\lambda$ により，$\mathfrak{g} = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}'_\lambda$ である．ところが補題 1.54 により $\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ は直和なので，$\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}'_\lambda$ が任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して成立する．したがって (2.37),...,(2.42) から次が従う．

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{0\} \qquad (\lambda \notin Q^+ \cup (-Q^+)), \tag{2.59}$$

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}, \tag{2.60}$$

$$\mathfrak{g}_\alpha = \sum_{\sum_{p=1}^r \alpha_{i_p} = \alpha} \mathbf{K}[e_{i_1}, [e_{i_2}, \ldots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \cdots] \quad (\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}), \tag{2.61}$$

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} = \sum_{\sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p} = \alpha} \mathbf{K}[f_{i_1}, [f_{i_2}, \ldots, [f_{i_{r-1}}, f_{i_r}] \cdots] \quad (\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}), \tag{2.62}$$

$$\mathfrak{n}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \tag{2.63}$$

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha < \infty \qquad (\alpha \in Q^+ \cup (-Q^+)). \tag{2.64}$$

2.14［命題］　$\{e_i, f_i\}_{i \in I}$ により生成される $\mathfrak{g}$ の部分リー代数を $\mathfrak{a}$ とするとき，

$$\mathfrak{a} = (\sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i) \oplus (\bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}].$$

証明　(2.59), (2.61), (2.62) により $\mathfrak{a} \supset \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda$ が成り立つ．また $[e_i, f_i] = h_i$ により，$\mathfrak{a} \supset \sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i$ である．よって $\mathfrak{b} = (\sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i) \oplus (\bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda)$ とおくとき，$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} \supset \{e_i, f_i | i \in I\}$ である．したがって $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ を示すには，$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ の部分リー代数であることを示せばよい．それには，(2.58) により，

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i \qquad (\alpha \in Q^+ \setminus \{0\}) \tag{2.65}$$

を示せばよい．$\mathrm{ht}(\alpha)$ に関する帰納法で (2.65) を示す．$\mathrm{ht}(\alpha) = 1$ ならば $\alpha = \alpha_i$ と書けるが，このとき $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] = [\mathbf{K} e_i, \mathbf{K} f_i] = \mathbf{K} h_i$ となり主張は正しい．$\mathrm{ht}(\alpha) > 1$ とする．(2.61) により

$$\mathfrak{g}_\alpha = \sum_{\substack{\beta \in Q^+, i \in I, \\ \beta + \alpha_i = \alpha}} [e_i, \mathfrak{g}_\beta]$$

なので，$\beta + \alpha_i = \alpha$ を満たす $i \in I, \beta \in Q^+$ に関して，$[[e_i, \mathfrak{g}_\beta], \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i$ を示せばよい．ヤコビ恒等式と (2.58) により

$$[[e_i, \mathfrak{g}_\beta], \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset [e_i, [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\alpha}]] + [\mathfrak{g}_\beta, [e_i, \mathfrak{g}_{-\alpha}]] \subset [e_i, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] + [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]$$

であるが，$\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbf{K} f_i$ と $\mathrm{ht}(\beta) < \mathrm{ht}(\alpha)$ により，主張は明らか．以上により $\mathfrak{a} = (\sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i) \oplus (\bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda)$ が示された．

$[h_i, e_i] = 2e_i, [h, f_i] = -2f_i$ により $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \ni e_i, f_i$ である．よって $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \supset \mathfrak{a}$ である．したがって $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$ を示せばよい．$\mathfrak{g} = \sum_\lambda \mathfrak{g}_\lambda$ により，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \sum_{\lambda, \mu} [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu]$ となるので，(2.58) と (2.65) から，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset (\sum_{i \in I} \mathbf{K} h_i) \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{a}$ が従う．　∎

命題2.10と(2.47)により，リー代数$\tilde{\mathfrak{g}}$の自己同型$\tilde{\theta}$はリー代数$\mathfrak{g}$の自己同型θを引き起こす．これは

$$\theta(h) = -h \ (h \in \mathfrak{h}), \quad \theta(e_i) = f_i \ (i \in I), \quad \theta(f_i) = e_i \ (i \in I) \tag{2.66}$$

により定まる．$\theta^2 = \mathrm{id}$は明らか．また(2.43)と同様にして

$$\theta(\mathfrak{g}_\lambda) = \mathfrak{g}_{-\lambda} \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{2.67}$$

がわかる．

次の命題により，カッツ・ムーディ・リー代数の研究はカルタン行列Aが既約な場合に帰着される．

2.15 [命題]　カルタン行列Aが$A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)}$と直和分解されているとする．$\Phi^{(r)}$を，$A^{(r)}$をカルタン行列とする基本ルート・データとして，$\Phi = \bigoplus_{r=1}^n \Phi^{(r)}$とおく（命題2.6参照．$\Phi$は$A$をカルタン行列とする基本ルート・データである）．このとき，リー代数$\mathfrak{g}(\Phi)$は，リー代数$\mathfrak{g}(\Phi^{(1)}), \ldots, \mathfrak{g}(\Phi^{(n)})$の直和$\mathfrak{g}(\Phi^{(1)}) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}(\Phi^{(n)})$と同型である．

証明　分解$A = \bigoplus_{r=1}^n A^{(r)}$に対応する添え字集合$I$の分解を$I = \bigsqcup_{r=1}^n I^{(r)}$とする．$\Phi^{(r)} = (\mathfrak{h}^{(r)}, \{h_i\}_{i \in I^{(r)}}, \{\alpha_i\}_{i \in I^{(r)}})$とし，$\mathfrak{h} = \bigoplus_{r=1}^n \mathfrak{h}^{(r)}$とおくとき，$\Phi = (\bigoplus_{r=1}^n \mathfrak{h}^{(r)}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$である．このとき$\mathfrak{g}(\Phi), \bigoplus_{r=1}^n \mathfrak{g}(\Phi^{(r)})$は，ともに$\mathfrak{h}$を部分リー代数として含んでいる．簡単のために$\mathfrak{g}' = \bigoplus_{r=1}^n \mathfrak{g}(\Phi^{(r)})$とおく．

$\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi)$の定義により，リー代数の準同型写像$F : \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi) \to \mathfrak{g}'$が

$$\begin{aligned} &F(h) = h \quad (h \in \mathfrak{h}), \\ &F(\tilde{e}_i) = e_i \in \mathfrak{g}(\Phi^{(r)}) \subset \mathfrak{g}' \quad (i \in I^{(r)}), \\ &F(\tilde{f}_i) = f_i \in \mathfrak{g}(\Phi^{(r)}) \subset \mathfrak{g}' \quad (i \in I^{(r)}) \end{aligned}$$

により定まるが，これはさらにリー代数の準同型写像$\overline{F} : \mathfrak{g}(\Phi) \to \mathfrak{g}'$

$$\begin{aligned} &\overline{F}(h) = h \quad (h \in \mathfrak{h}), \\ &\overline{F}(e_i) = e_i \in \mathfrak{g}(\Phi^{(r)}) \subset \mathfrak{g}' \quad (i \in I^{(r)}), \\ &\overline{F}(f_i) = f_i \in \mathfrak{g}(\Phi^{(r)}) \subset \mathfrak{g}' \quad (i \in I^{(r)}) \end{aligned}$$

を導く．一方，リー代数の準同型写像 $G^{(r)} : \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi^{(r)}) \to \mathfrak{g}(\Phi)$

$$\begin{aligned} G^{(r)}(h) &= h \quad (h \in \mathfrak{h}^{(r)}), \\ G^{(r)}(\tilde{e}_i) &= e_i \in \mathfrak{g}(\Phi) \quad (i \in I^{(r)}), \\ G^{(r)}(\tilde{f}_i) &= f_i \in \mathfrak{g}(\Phi) \quad (i \in I^{(r)}) \end{aligned}$$

はリー代数の準同型写像 $\overline{G}^{(r)} : \mathfrak{g}(\Phi^{(r)}) \to \mathfrak{g}(\Phi)$

$$\begin{aligned} \overline{G}^{(r)}(h) &= h \quad (h \in \mathfrak{h}^{(r)}), \\ \overline{G}^{(r)}(e_i) &= e_i \in \mathfrak{g}(\Phi) \quad (i \in I^{(r)}), \\ \overline{G}^{(r)}(f_i) &= f_i \in \mathfrak{g}(\Phi) \quad (i \in I^{(r)}) \end{aligned}$$

を導く．$r \neq s$ のとき $[\overline{G}^{(r)}(\mathfrak{g}(\Phi^{(r)})), \overline{G}^{(s)}(\mathfrak{g}(\Phi^{(s)}))] = \{0\}$ なので，これからリー代数の準同型写像

$$\overline{G} = \bigoplus_{r=1}^{n} \overline{G}^{(r)} : \mathfrak{g}' = \bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{g}(\Phi^{(r)}) \to \mathfrak{g}(\Phi)$$

$$\overline{G}(h) = h \quad (h \in \mathfrak{h}), \quad \overline{G}(e_i) = e_i, \quad \overline{G}(f_i) = f_i \quad (i \in I)$$

が定まる．ところが $\overline{F} \circ \overline{G}, \overline{G} \circ \overline{F}$ はともに生成系の上で恒等写像なので，$\overline{F} \circ \overline{G} = \mathrm{id}, \overline{G} \circ \overline{F} = \mathrm{id}$ となり，主張が示された．∎

2.16［補題］　$i \in I$ に対して，$e_i \neq 0$ かつ $f_i \neq 0$．また $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbf{K}e_i$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbf{K}f_i$．したがって特に $\dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha_i} = 1$.

証明　$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbf{K}e_i$, $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbf{K}f_i$ は明らかなので，$e_i \neq 0, f_i \neq 0$ を示せばよいが，これは $[e_i, f_i] = h_i \neq 0$ により明らかである．∎

2.17［例］　1 次元のベクトル空間 $\mathfrak{h} = \mathbf{K}h$ 上の線形形式 α を $\alpha(h) = 2$ により定める．このとき $\Phi = (\mathfrak{h}, \{h\}, \{\alpha\})$ は基本ルート・データであって，そのカルタン行列は $A = (2)$ で与えられる（I がただ 1 つの元からなる添え字集合の場合）．$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi), \mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ とする．直和分解 $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^+ \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^-$ において，$\tilde{\mathfrak{n}}^+$ および $\tilde{\mathfrak{n}}^-$ はそれぞれ $\tilde{e} = \tilde{e}_i$ および $\tilde{f} = \tilde{f}_i$ により生成される自由リー代数であるが，$|I| = 1$ という特殊事情から，$\tilde{\mathfrak{n}}^+ = \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \mathbf{K}\tilde{e}$，$\tilde{\mathfrak{n}}^- = \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} = \mathbf{K}\tilde{f}$

となってしまう．したがって補題 2.16 により，$\mathfrak{r}(\Phi) = \{0\}$ である．以上により，$\mathfrak{g}(\Phi)\,(= \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi))$ は $\{h, e, f\}$ を基底とする 3 次元リー代数で，そのブラケット積は

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f, \qquad [e, f] = h$$

で与えられる．これは $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ と同型なリー代数に他ならない． □

2.18 [例]　h_1, h_2 を基底とする 2 次元のベクトル空間 $\mathfrak{h}$ 上の線形形式 α_1, α_2 を

$$\alpha_i(h_i) = 2 \quad (i = 1, 2), \qquad \alpha_j(h_i) = -1 \quad (i \neq j)$$

により定めるとき，$\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_1, h_2\}, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ は基本ルート・データとなるが，例 1.74 は $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{K}) \cong \mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ を示している． □

ここでもう少し自明でない例も述べたいのだが，それには一般論の準備をしておいたほうが楽なので，読者には辛抱してもう少し待ってもらうことにしよう．

3. 可積分表現

$i \in I$ に対して

$$\mathfrak{a}_i = \mathbf{K}h_i + \mathbf{K}e_i + \mathbf{K}f_i \tag{2.68}$$

とおく．これは $\mathfrak{g}$ の 3 次元の部分空間であるが，さらに

$$[h_i, e_i] = 2e_i, \qquad [h_i, f_i] = -2f_i, \qquad [e_i, f_i] = h_i$$

なので，$\mathfrak{a}_i$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ と同型な部分リー代数である．すなわちリー代数の同型写像

$$\varphi_i : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \mathfrak{a}_i \tag{2.69}$$

が

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto h_i, \qquad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto e_i, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto f_i$$

により定まる．$U(\mathfrak{g})$ 加群 V があれば，それを $\mathfrak{a}_i$ に制限して $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群と思うことができる．このとき V が $U(\mathfrak{a}_i)$ 加群として局所有限，すなわち任意

の $v \in V$ に対して $\dim U(\mathfrak{a}_i)v < \infty$ が成り立っていれば，第1章5節の理論を適用することができる．この節では，このような都合のよい $U(\mathfrak{g})$ 加群（可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群）について考察する．

一般に，$U(\mathfrak{g})$ 加群があるとき，これを $U(\mathfrak{h})$ 加群と見なして（$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のカルタン部分代数），第1章4節の記号および言葉遣いを用いる．すなわち，$U(\mathfrak{g})$ 加群 M と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，

$$M_\lambda = \{m \in M | hm = \lambda(h)m \ (h \in \mathfrak{h})\} \tag{2.70}$$

とおく．また，$M_\lambda \neq \{0\}$ のとき，λ を $U(\mathfrak{g})$ 加群 M の**ウェイト**といい，M_λ をウェイト λ の**ウェイト空間**と呼ぶ．補題 1.57 により，

$$\mathfrak{g}_\alpha M_\lambda \subset M_{\lambda+\alpha} \qquad (\alpha, \lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{2.71}$$

が成り立っている．

2.19［定義］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 M が以下の条件を満たすとき，これを**ウェイト加群**（weight module）と呼ぶ．

(i) $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} M_\lambda$.

(ii) 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\dim M_\lambda < \infty$.

M をウェイト加群とする．M のウェイトの集合を $\mathrm{Wt}(M)$ で表す．また

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \dim M_\lambda \mathbf{e}^\lambda \tag{2.72}$$

を M の**指標**（character）と呼ぶ．とりあえず，ここでは $\mathbf{e}^\lambda$ は形式的な記号と思っておくことにする（後でもう少し色をつける）．

2.20［定義］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 M が，ウェイト加群であって，さらに，任意の $i \in I$ と $m \in M$ に対して $\dim U(\mathfrak{a}_i)m < \infty$ が成り立つとき，M を**可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群**（integrable $U(\mathfrak{g})$-module）と呼ぶ．

2.21［命題］　M を可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．$\lambda \in \mathrm{Wt}(M)$, $i \in I$ とし，$\mu = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ とおく．

(i) $\lambda(h_i)$ は整数である．

(ii) 非負整数 p, q が存在して，

(a) $k \in \mathbf{Z}, \lambda + k\alpha_i \in \mathrm{Wt}(M) \iff k = -p, -p+1, \ldots, q-1, q,$

(b) $p - q = \lambda(h_i)$.

(iii) $\dim M_\lambda = \dim M_\mu$．特に $\mu \in \mathrm{Wt}(M)$ である．

証明 M の部分空間 V を $V = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} M_{\lambda+k\alpha_i}$ により定める．$h_i \in \mathfrak{g}_0$，, $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ なので，(2.71) により，

$$h_i M_{\lambda+k\alpha_i} \subset M_{\lambda+k\alpha_i}, \quad e_i M_{\lambda+k\alpha_i} \subset M_{\lambda+(k+1)\alpha_i},$$
$$f_i M_{\lambda+k\alpha_i} \subset M_{\lambda+(k-1)\alpha_i}$$

が成立している．よって V は局所有限な $U(\mathfrak{a}_i)$ 加群である．$m = \lambda(h_i)$ とおく．$(\lambda + k\alpha_i)(h_i) = m + 2k$ なので，φ_i により $\mathfrak{a}_i$ を $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ と同一視するとき，$M_{\lambda+k\alpha_i} = V_{m+2k}$ が成り立つ（ここで第 1 章 5 節の記法を用いた）．$M_\lambda \neq \{0\}$ なので $V_m \neq \{0\}$ だが，V は局所有限な $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群なので，第 1 章 5 節により，$m \in \mathbf{Z}$ でなければならない．また非負整数 p, q に対して $p - q = m$ が成立しているとすると，

$$(\lambda + q\alpha_i)(h_i) = m + 2q = p + q \geqq 0,$$
$$(\lambda - p\alpha_i)(h_i) = m - 2p = -(p+q) \leqq 0,$$
$$\mu(h_i) = -m = -\lambda(h_i)$$

となる．

以上の考察から，一般に，局所有限な $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群 V と $\epsilon \in \{0, 1\}$ に対して

$$V = \bigoplus_{i\in 2\mathbf{Z}+\epsilon} V_i, \qquad \dim V_i < \infty \quad (i \in 2\mathbf{Z} + \epsilon)$$

が成立しているならば，ある $r \in 2\mathbf{Z} + \epsilon$, $r \geqq 0$ に関して次の事実が成り立つことを示せばよい：

$$\dim V < \infty, \tag{2.73}$$

$$\dim V_i = \dim V_{-i} \qquad (i \in 2\mathbf{Z} + \epsilon), \tag{2.74}$$

$$V_i \neq \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad i \in 2\mathbf{Z} + \epsilon,\ -r \leqq i \leqq r. \tag{2.75}$$

V の局所有限性により，V の有限次元部分 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群の増大列

$$\{0\} = V^0 \subsetneqq V^1 \subsetneqq V^2 \subsetneqq \cdots \subset V \tag{2.76}$$

がとれる．さらに V^j/V^{j-1} は既約 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群であるとしておいてよい．このとき定理 1.62 により，ある非負整数 n_j があって，V^j/V^{j-1} は $V(2n_j+\epsilon)$ と同型な $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群である（例 1.45）．特に $\dim(V^j/V^{j-1})_\epsilon = 1$ である．$\dim V = \infty$ と仮定すると，(2.76) は無限列となり，

$$\dim V_\epsilon \geqq \dim(V^j)_\epsilon = \sum_{k=1}^{j} \dim(V^k/V^{k-1})_\epsilon = j$$

が任意の j について成り立つが，これは $\dim V_\epsilon$ の有限性に矛盾する．したがって $\dim V < \infty$ でなければならない．(2.73) が示された．このとき (2.76) は有限列である．よって，残りの (2.74), (2.75) も，対応する事実が，各 V^j/V^{j-1} において成り立っていることから，明らかである．∎

M を可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．M は有限次元 $U(\mathfrak{a}_i)$ 加群の和になるので，$\mathfrak{a}_i$ を $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ と同一視することにより，第1章5節の τ にあたる線形変換

$$\tau_i = \exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i) : M \to M \tag{2.77}$$

が定まり，全単射である（逆変換は $\exp(-e_i)\exp(f_i)\exp(-e_i)$）．

2.22［補題］　M を可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とすると，任意の $i \in I$ と $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\tau_i(M_\lambda) = M_{\lambda-\lambda(h_i)\alpha_i}$ が成り立つ．

証明　$V = \sum_{k\in\mathbf{Z}} M_{\lambda+k\alpha_i}$ とおく．$\mathfrak{a}_i$ と $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ を同一視するとき，V は有限次元 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群で，$M_{\lambda+k\alpha_i} = V_{\lambda(h_i)+2k}$ が成り立っている（V の有限次元性は命題 2.21 から従う）．よって補題 1.69 により，$\tau_i(M_\lambda) = M_{\lambda-\lambda(h_i)\alpha_i}$ である．∎

4. ルート系とワイル群

2.23 [定義] $\mathfrak{h}^*$ の部分集合 $\Delta, \Delta^+, \Delta^-$ を

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}, \qquad \Delta^\pm = \Delta \cap (\pm Q^+) \tag{2.78}$$

により定め，Δ の元を**ルート**（root），Δ^+ の元を**正ルート**（positive root），Δ^- の元を**負ルート**（negative root）と呼ぶ．

(2.59) と (2.67) により

$$\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-, \qquad \Delta^- = -\Delta^+ \tag{2.79}$$

が成立している．また (2.61)，(2.62) により

$$\mathbf{Z}\alpha_i \cap \Delta = \{\pm\alpha_i\} \qquad (i \in I) \tag{2.80}$$

である．

ルート α に対して，$\mathfrak{g}_\alpha$ を α に付随する**ルート空間**（root space）と呼ぶ．また分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha) \tag{2.81}$$

を $\mathfrak{g}$ の**ルート空間分解**（root space decomposition）と呼ぶ．これに関して

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta), \tag{2.82}$$

$$[h, x] = \alpha(h)x \qquad (\alpha \in \Delta, h \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}_\alpha) \tag{2.83}$$

が成立している（(2.83) は $\mathfrak{g}_\alpha$ の定義そのもの，(2.82) は，補題 1.57 から従う）．

ルート $\alpha = \sum_{i\in I} m_i\alpha_i$ に対して，

$$\mathrm{Supp}(\alpha) = \{i \in I | m_i \neq 0\} \tag{2.84}$$

とおき，これを α の**台**（support）と呼ぶ．

2.24 [補題] $\alpha \in \Delta$ の台は，ディンキン図形の連結な部分図形に対応する．

証明　$\Delta^- = -\Delta^+$ なので，$\alpha \in \Delta^+$ としてよい．主張を $\mathrm{ht}(\alpha)$ に関する帰納法で示す．$\mathrm{ht}(\alpha) = 1$ なら $\alpha = \alpha_i$ と書けるので明らか．$\mathrm{ht}(\alpha) > 1$ とする．(2.61) により，I の元の列 $i_1, \ldots, i_p$ であって，

$$\sum_{p=1}^{r} \alpha_{i_p} = \alpha, \qquad [e_{i_1}, [e_{i_2}, \ldots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \cdots] \neq 0$$

を満たすものが存在する．このとき，$[e_{i_2}, [e_{i_3}, \ldots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \cdots] \neq 0$ なので，$\beta = \sum_{p=2}^{r} \alpha_{i_p}$ に関して $\mathfrak{g}_\beta \neq \{0\}$ が成り立つ．よって $\beta \in \Delta^+$ である．$\mathrm{ht}(\beta) = \mathrm{ht}(\alpha) - 1$ なので，帰納法の仮定から，$\mathrm{Supp}(\beta) = \{i_2, i_3, \cdots, i_r\}$ はディンキン図形の連結な部分図形に対応する．よって，ディンキン図形において，i_1 と i_p が結ばれるような $2 \leqq p \leqq r$ が存在することを示せばよい．このような p が存在しないと仮定すると，$a_{i_1 i_p} = 0$ $(2 \leqq p \leqq r)$ により，

$$\mathrm{ad}(e_{i_1})(e_{i_p}) = \mathrm{ad}(e_{i_1})^{1 - a_{i_1 i_p}}(e_{i_p}) = 0$$

が成り立つ．よって (1.15) から

$$[e_{i_1}, [e_{i_2}, \ldots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \cdots] = \mathrm{ad}(e_{i_1})([e_{i_2}, [e_{i_3}, \ldots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \cdots]) = 0$$

が従うが，これは矛盾である．■

2.25 [命題]　$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現により，$\mathfrak{g}$ は可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．

証明　任意の $i \in I$ に関して，リー代数 $\mathfrak{a}_i$ の $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現が局所有限であることを示せばよい．すなわち $a \in \mathfrak{g}$ であって $\dim \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a) < \infty$ を満たすものの全体を $\mathfrak{k}$ とおくとき，$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$ を示せばよい．$a, b \in \mathfrak{k}$ のとき

$$\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a+b) \subset \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a) + \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(b),$$
$$\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))([a,b]) \subset [\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a), \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(b)]$$

なので，

$$\dim(\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a+b)) \leqq \dim \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a) + \dim \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(b) < \infty,$$
$$\dim(\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))([a,b])) \leqq (\dim \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(a))(\dim \mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(b)) < \infty$$

となり，$a+b$, $[a,b]\in\mathfrak{k}$. また $\mathfrak{k}$ がスカラー倍に関して閉じていることは明らかなので，$\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数となる．よって $\mathfrak{g}$ の生成元が $\mathfrak{k}$ に含まれることを示せばよい．すなわち $\mathfrak{h}\cup\{e_j,\ f_j|j\in I\}\subset\mathfrak{k}$ を示せばよい．

$\mathfrak{h}+\mathbf{K}e_i+\mathbf{K}f_i$ は $\mathfrak{a}_i$ を含む有限次元部分リー代数なので，特に $\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))$ 不変である．したがって $\mathfrak{h}\cup\{e_i,\ f_i\}\subset\mathfrak{k}$. よって $i\neq j$ のときに $e_j, f_j\in\mathfrak{k}$ を示せばよい．ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により，

$$U(\mathfrak{a}_i)=\sum_{k,\ell,m}\mathbf{K}e_i^kf_i^\ell h_i^m=\sum_{k,\ell,m}\mathbf{K}f_i^ke_i^\ell h_i^m$$

なので，$j\neq i$ のとき

$$\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(e_j)=\sum_{k,\ell,m}\mathbf{K}\,\mathrm{ad}(e_i)^k\,\mathrm{ad}(f_i)^\ell\,\mathrm{ad}(h_i)^m(e_j)=\sum_{k=0}^{-a_{ij}}\mathbf{K}\,\mathrm{ad}(e_i)^k(e_j),$$

$$\mathrm{ad}(U(\mathfrak{a}_i))(f_j)=\sum_{k,\ell,m}\mathbf{K}\,\mathrm{ad}(f_i)^k\,\mathrm{ad}(e_i)^\ell\,\mathrm{ad}(h_i)^m(f_j)=\sum_{k=0}^{-a_{ij}}\mathbf{K}\,\mathrm{ad}(f_i)^k(f_j)$$

が成り立つ．ここで

$$[f_i,e_j]=[e_i,f_j]=\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j)=\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j)=0$$

を用いた．これで $e_j, f_j\in\mathfrak{k}$ も示された．■

命題 2.25 と命題 2.21 から，次が従う．

2.26 [命題]　$\lambda\in\Delta\cup\{0\}$, $i\in I$ とし，$\mu=\lambda-\lambda(h_i)\alpha_i$ とおく．

(i) 非負整数 p, q が存在して，

(a) $k\in\mathbf{Z}, \lambda+k\alpha_i\in\Delta\cup\{0\}\iff k=-p,-p+1,\dots,q-1,q,$

(b) $p-q=\lambda(h_i)$.

(ii) $\dim\mathfrak{g}_\lambda=\dim\mathfrak{g}_\mu$.

$i\in I$ に対して $\mathfrak{h}^*$ の線形変換 s_i を

$$s_i(\lambda)=\lambda-\lambda(h_i)\alpha_i\qquad(\lambda\in\mathfrak{h}^*)\tag{2.85}$$

により定める．$\mathfrak{h}^*$ の余次元 1 の部分空間 $H_i = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(h_i) = 0\}$ に関して $\alpha_i \notin H_i$ なので，$\mathfrak{h}^* = H_i \oplus \mathbf{K}\alpha_i$ であるが，s_i の定義から

$$s_i(\lambda) = \lambda \quad (\lambda \in H_i), \qquad s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$$

が成立している．そこで s_i を（超平面 H_i に関する）鏡映変換と呼ぶこともある．s_i^2 は H_i の元および α_i をともに固定するので，

$$s_i^2 = 1 \tag{2.86}$$

が成立する．特に $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ である．

2.27［定義］　$\{s_i\}_{i \in I}$ により生成される $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群を W で表し，これをカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}$ の**ワイル群**（Weyl group）と呼ぶ．

W は $\mathfrak{h}^*$ の線形変換のなす群なので，その双対空間 $\mathfrak{h}$ にも自然に作用している：

$$\lambda(w(h)) = (w^{-1}(\lambda))(h) \qquad (w \in W,\, h \in \mathfrak{h},\, \lambda \in \mathfrak{h}^*). \tag{2.87}$$

このとき

$$s_i(h) = h - \alpha_i(h)h_i \qquad (i \in I,\, h \in \mathfrak{h}). \tag{2.88}$$

実際，$s_i^2 = 1$ なので $\lambda(h - \alpha_i(h)h_i) = (s_i(\lambda))(h)$ が任意の $h \in \mathfrak{h}, \lambda \in \mathfrak{h}^*$ について成り立っていることを見ればよいが，計算してみると

$$\lambda(h - \alpha_i(h)h_i) = \lambda(h) - \alpha_i(h)\lambda(h_i) = (\lambda - \lambda(h_i)\alpha_i)(h)$$

により成り立っていることがわかる．

2.28［命題］　任意の $w \in W$ に対して次が成立する：

$$w(\Delta) = \Delta, \tag{2.89}$$

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{w(\alpha)} \qquad (\alpha \in \Delta). \tag{2.90}$$

証明　$w = s_i$ としてよいが，このとき主張は命題 2.26 から明らか．　∎

命題 2.25 により，$i \in I$ に対して $\mathfrak{g}$ の全単射線形変換

$$\tau_i = \exp(\mathrm{ad}(e_i)) \exp(-\mathrm{ad}(f_i)) \exp(\mathrm{ad}(e_i)) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad (2.91)$$

が定まる．

2.29 [命題] $i \in I$ とする．

(i) $\tau_i : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型写像である．

(ii) M を可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とするとき，

$$\tau_i(am) = \tau_i(a)\tau_i(m) \qquad (a \in \mathfrak{g}, m \in M).$$

(iii) $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{s_i(\alpha)}$.

(iv) τ_i の $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ への制限 $\tau_i|\mathfrak{h}$ は s_i と一致する．

証明 (i), (ii) は，それぞれ補題 1.68，補題 1.69 と全く同様に示される．(iii) は，補題 2.22 の特別な場合である．(iv) を示す．$U = \{h \in \mathfrak{h} | \alpha_i(h) = 0\}$ とおくとき，$\mathfrak{h} = U \oplus \mathbf{K}h_i$ であるが，$s_i(h_i) = -h_i, s_i(h) = h\,(h \in U)$ なので，$\tau_i(h_i) = -h_i, \tau_i(h) = h\,(h \in U)$ を示せばよい．$\tau_i(h_i) = -h_i$ は補題 1.68 から従う．$h \in U$ とする．U の定義から $[e_i, h] = [f_i, h] = 0$ なので，τ_i の定義から $\tau_i(h) = h$ が従う． ∎

2.30 [命題] 任意の $i \in I$ に対して $s_i(\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) = \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ である．

証明 $\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ とする．$\alpha = \sum_{j \in I} n_j \alpha_j$ と書く．$n_j = 0$ が任意の $j \in I \setminus \{i\}$ に対して成り立っているとすると，$\alpha \in \mathbf{Z}\alpha_i \cap \Delta^+$ であるが，このとき (2.80) により $\alpha = \alpha_i$ となり $\alpha \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ に矛盾する．したがって $n_j > 0$ なる $j \in I \setminus \{i\}$ が存在する．$s_i(\alpha) = \sum_{j \neq i} n_j \alpha_j + (n_i - \alpha(h_i))\alpha_i$ なので，(2.79) により $s_i(\alpha) \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ である．$s_i(\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) \subset \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ がわかった．$s_i^2 = 1$ なので，これから $s_i(\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) = \Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}$ が従う． ∎

2.31 [定義] $\alpha \in \Delta$ であって $\alpha = w(\alpha_i)$ $(w \in W, i \in I)$ と書けるもののことを**実ルート** (real root) と呼び，そうでないものを**虚ルート** (imaginary

root）と呼ぶ．また実ルートの全体および虚ルートの全体をそれぞれ $\Delta_{\mathrm{re}}, \Delta_{\mathrm{im}}$ で表す．すなわち

$$\Delta_{\mathrm{re}} = \bigcup_{i \in I} W(\alpha_i), \qquad \Delta_{\mathrm{im}} = \Delta \setminus \Delta_{\mathrm{re}} \tag{2.92}$$

とする．さらに $\Delta_{\mathrm{re}}^+, \Delta_{\mathrm{re}}^-, \Delta_{\mathrm{im}}^+, \Delta_{\mathrm{im}}^-$ を次で定める：

$$\Delta_{\mathrm{re}}^{\pm} = \Delta_{\mathrm{re}} \cap \Delta^{\pm}, \qquad \Delta_{\mathrm{im}}^{\pm} = \Delta_{\mathrm{im}} \cap \Delta^{\pm}. \tag{2.93}$$

これに関して以下の事実が成立する：

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1 \quad (\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}), \tag{2.94}$$

$$W(\Delta_{\mathrm{re}}) = \Delta_{\mathrm{re}}, \tag{2.95}$$

$$W(\Delta_{\mathrm{im}}) = \Delta_{\mathrm{im}}, \tag{2.96}$$

$$\Delta_{\mathrm{re}}^- = -\Delta_{\mathrm{re}}^+, \tag{2.97}$$

$$\Delta_{\mathrm{im}}^- = -\Delta_{\mathrm{im}}^+, \tag{2.98}$$

$$W(\Delta_{\mathrm{im}}^+) = \Delta_{\mathrm{im}}^+, \qquad W(\Delta_{\mathrm{im}}^-) = \Delta_{\mathrm{im}}^-. \tag{2.99}$$

(2.94) は，補題 2.16 と (2.90) の帰結である．(2.95), (2.97) は，Δ_{re} の定義と $s_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ により明らか．このとき (2.96),(2.98) も，Δ_{im} の定義と (2.95), (2.97) により明らか．(2.99) を示そう．(2.98) により，任意の $w \in W$ に対して $w(\Delta_{\mathrm{im}}^+) \subset \Delta_{\mathrm{im}}^+$ を示せばよい．$w = s_i$ としてよいが，このとき命題 2.30 により $s_i(\Delta_{\mathrm{im}}^+) \subset s_i(\Delta^+ \setminus \{\alpha_i\}) \subset \Delta^+$ である．よって主張は (2.96) より明らか．

2.32［補題］　$w \in W$ と $i, j \in I$ に関して $w(\alpha_i) = \alpha_j$ が成立しているとき，$w(h_i) = h_j$ が成立する[5]．

証明　$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ とする．$\mathfrak{g}$ の自己同型写像 $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\tau = \tau_{i_1} \tau_{i_2} \cdots \tau_{i_r}$ により定める．このとき命題 2.29 により $\tau(\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}) = \mathfrak{g}_{\pm w(\alpha_i)} = \mathfrak{g}_{\pm\alpha_j}$ である．したがって $\tau(e_i) \in \mathbf{K} e_j, \tau(f_i) \in \mathbf{K} f_j$ が成立する．τ はリー代数の同型写像だったので，命題 2.29 により

$$w(h_i) = \tau(h_i) = \tau([e_i, f_i]) = [\tau(e_i), \tau(f_i)] \in \mathbf{K}[e_j, f_j] = \mathbf{K} h_j.$$

[5] カルタン行列が対称化可能なときには，この事実の証明はもっとやさしい．

したがって $w(h_i) = ch_j \ (c \in \mathbf{K})$ と書ける．ところが

$$2 = \alpha_i(h_i) = (w^{-1}(\alpha_j))(h_i) = \alpha_j(w(h_i)) = c\alpha_j(h_j) = 2c$$

より，$c = 1$ でなければならない． ∎

$\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ とすると $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W$ と $i \in I$ がとれるが，このとき $\alpha^\vee = w(h_i) \in \mathfrak{h}$ は $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W$ と $i \in I$ の取り方によらずに定まる．実際 $\alpha = w(\alpha_i) = y(\alpha_j) \ (w, y \in W, i, j \in I)$ とすると，$y^{-1}w(\alpha_i) = \alpha_j$ なので，補題 2.32 により $y^{-1}w(h_i) = h_j$，したがって $w(h_i) = y(h_j)$ である．この $\alpha^\vee \in \mathfrak{h}$ を $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ に対応する**余ルート**（coroot）と呼ぶ．定義から余ルートの集合 $\{\alpha^\vee | \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}\}$ は W 不変で，さらに

$$w(\alpha^\vee) = (w(\alpha))^\vee \qquad (w \in W, \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}) \tag{2.100}$$

が成立している．

また $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ に対して $\mathfrak{h}^*$ の線形変換 s_α を

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(\alpha^\vee)\alpha \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*) \tag{2.101}$$

により定める（したがって $i \in I$ に対して $s_{\alpha_i} = s_i$ である）．

2.33［補題］

(i) $s_\alpha \in W \qquad (\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}})$.

(ii) $s_{w(\alpha)} = ws_\alpha w^{-1} \qquad (w \in W, \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}})$.

証明　(ii) 定義により

$$\begin{aligned} ws_\alpha w^{-1}(\lambda) &= w(w^{-1}(\lambda) - (w^{-1}(\lambda))(\alpha^\vee)\alpha) = \lambda - \lambda((w(\alpha))^\vee)w(\alpha) \\ &= s_{w(\alpha)}(\lambda). \end{aligned}$$

(i) $\alpha = w(\alpha_i)$ を満たす $w \in W, i \in I$ をとるとき，(ii) により，$s_\alpha = s_{w(\alpha_i)} = ws_iw^{-1} \in W$. ∎

$w \in W$ とする．W は $\{s_i\}_{i \in I}$ により生成される群なので，

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \qquad (i_1, \ldots, i_r \in I) \tag{2.102}$$

と書ける（$s_i^2 = 1$ に注意）．このような w の表示 (2.102) のうちで r が最小になるものを**最短表示**（minimal expression）と呼ぶ．また (2.102) が最短表示のとき，r を w の**長さ**（length）と呼び $\ell(w)$ で表す．すなわち

$$\ell(w) = \min\{r \mid \text{ある } i_1, \ldots, i_r \in I \text{ に対して } w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}\}. \tag{2.103}$$

例えば $\ell(1) = 0$, $\ell(s_i) = 1$ $(i \in I)$ である．

2.34［補題］

(i) 任意の $w \in W$ に対して, $\ell(w) = \ell(w^{-1})$ が成り立つ．すなわち, $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が最短表示ならば，$s_{i_r} \cdots s_{i_1}$ も最短表示である．

(ii) $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とすると，$1 \leqq p \leqq q \leqq r$ に対して $s_{i_p} \cdots s_{i_q}$ も最短表示である．

証明　(i) $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を w の最短表示とすると，$w^{-1} = s_{i_r} \cdots s_{i_1}$ なので，$\ell(w^{-1}) \leqq r = \ell(w)$ である．w^{-1} に同様の議論を適用すると，$\ell(w^{-1}) \geqq \ell((w^{-1})^{-1}) = \ell(w)$．したがって $\ell(w) = \ell(w^{-1})$．

(ii) $s_{i_p} \cdots s_{i_q}$ が最短表示でないとすると，

$$s_{i_p} \cdots s_{i_q} = s_{j_1} \cdots s_{j_t} \qquad (t < q - p + 1)$$

と書ける．このとき

$$s_{i_1} \cdots s_{i_r} = (s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}})(s_{j_1} \cdots s_{j_t})(s_{i_{q+1}} \cdots s_{i_r})$$

となるが，これは $s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が最短表示であることに反する．よって $s_{i_p} \cdots s_{i_q}$ は最短表示である．∎

2.35［補題］　$w \in W, i \in I$ とすると, $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1$ あるいは $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$ のいずれかが成り立つ．

証明　$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を最短表示とすると $(r = \ell(w))$，$ws_i = s_{i_1} \cdots s_{i_r} s_i$ と書けるので，$\ell(ws_i) \leqq \ell(w) + 1$ である．また w を ws_i で置き換えて，$\ell(w) \leqq \ell(ws_i) + 1$ となる．よって $\ell(w) - 1 \leqq \ell(ws_i) \leqq \ell(w) + 1$ が成り立つ．したがって $\ell(w) \neq \ell(ws_i)$ を示せばよい．群の準同型 $\epsilon : W \mapsto \mathbf{K}^\times$ $(w \mapsto \det(w))$ を考える．s_i は $\mathfrak{h}^*$ の鏡映変換なので $\epsilon(s_i) = -1$ である．$\ell(w) = r$ とすると $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ と書けるので，$\epsilon(w) = (-1)^r$ となる．すなわち，任意の $w \in W$ に対して $\epsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$ が成り立つ．よって $(-1)^{\ell(ws_i)} = \epsilon(ws_i) = \epsilon(w)\epsilon(s_i) = (-1)^{\ell(w)+1}$ から $\ell(w) = \ell(ws_i)$ は起こり得ないことがわかる．■

2.36 [補題]　$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が $w \in W$ の最短表示ならば，$s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) \in \Delta^+$ である．

証明　$s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) \in \Delta^-$ と仮定する．$\alpha_{i_r} \in \Delta^+$ なので，ルートの列

$$\alpha_{i_r}, s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}), s_{i_{r-2}} s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}), \ldots, s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})$$

を左から順番に見ていくときに，どこかで正ルートから負ルートに変わる場所がある．すなわち，ある $1 \leqq k \leqq r-1$ に関して

$$s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) \in \Delta^+, \qquad s_{i_k} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) \in \Delta^-$$

が成り立つ．$\beta = s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r})$ とおくとき，$\beta \in \Delta^+$ かつ $s_{i_k}(\beta) \in \Delta^-$ なので，命題 2.30 により，$\beta = \alpha_{i_k}$ でなくてはならない．すなわち，$s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) = \alpha_{i_k}$ が成り立つ．よって補題 2.33(ii) により，

$$(s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{r-1}}) s_{i_r} (s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{r-1}})^{-1} = s_{i_k},$$

すなわち，$s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r} = s_{i_k} \cdots s_{i_{r-1}}$ が成り立つ．このとき

$$w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} = (s_{i_1} \cdots s_{i_k})(s_{i_k} \cdots s_{i_{r-1}}) = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_{r-1}}$$

となるが，これは $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ が最短表示であることに矛盾する．■

2.37 [補題]　$w \in W, i \in I$ とするとき，

$$\ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \Leftrightarrow w(\alpha_i) \in \Delta^+, \quad \ell(ws_i) = \ell(w) - 1 \Leftrightarrow w(\alpha_i) \in \Delta^-.$$

証明　$\ell(ws_i) = \ell(w)+1$ とする．$w = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ を w の最短表示とするとき，$ws_i = s_{i_1}\cdots s_{i_r}s_i$ も最短表示になるので，補題 2.36 により $w(\alpha_i) = s_{i_1}\cdots s_{i_r}(\alpha_i) \in \Delta^+$ である．また $\ell(ws_i) = \ell(w)-1$ のときは，上の議論で w を ws_i で置き換えることにより，$w(\alpha_i) = -ws_i(\alpha_i) \in \Delta^-$ となる．$\ell(ws_i) = \ell(w)+1$ か $\ell(ws_i) = \ell(w)-1$ かのどちらかが必ず成立し（補題 2.35），$w(\alpha_i) \in \Delta^+$ か $w(\alpha_i) \in \Delta^-$ かのどちらかが必ず成立するので，主張は明らかである． ∎

2.38［**補題**］　$w \in W, i \in I$ について $\ell(ws_i) = \ell(w)+1$ が成り立っているとき，$\Delta^+ \cap ws_i(\Delta^-) = (\Delta^+ \cap w(\Delta^-)) \sqcup \{w(\alpha_i)\}$ である．

証明　命題 2.30 により

$$\begin{aligned}\Delta^+ \cap ws_i(\Delta^-) &= \Delta^+ \cap w((\Delta^- \setminus \{-\alpha_i\}) \sqcup \{\alpha_i\}) \\ &= (\Delta^+ \cap w(\Delta^- \setminus \{-\alpha_i\})) \sqcup (\Delta^+ \cap \{w(\alpha_i)\}) \\ &= (\Delta^+ \cap w(\Delta^-)) \sqcup \{w(\alpha_i)\}.\end{aligned}$$

∎

2.39［**命題**］　$w \in W$ に対して $\ell(w) = |\Delta^+ \cap w(\Delta^-)|$ が成立する．

証明　$\ell(w)$ に関する帰納法を用いる．$\ell(w) = 0$ すなわち $w = 1$ のとき主張は明らか．$\ell(w) > 0$ とする．w の最短表示を $w = s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ とし $y = s_{i_1}\cdots s_{i_{r-1}}$ とおくと，$\ell(ys_{i_r}) = \ell(y)+1$ なので補題 2.38 により $|\Delta^+ \cap w(\Delta^-)| = |\Delta^+ \cap ys_i(\Delta^-)| = |\Delta^+ \cap y(\Delta^-)|+1$ となる．したがって帰納法の仮定により，$\ell(w) = \ell(y)+1 = |\Delta^+ \cap y(\Delta^-)|+1 = |\Delta^+ \cap w(\Delta^-)|$ が わかる． ∎

5．標準形式

$(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ を基本ルート・データ，$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ をそのカルタン行列とし，

$$E = \sum_{i\in I} \mathbf{K}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^* \tag{2.104}$$

とおく．

2.40［命題］　ワイル群 $W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ は E を保ち，制限写像 $W \to GL(E)$ $(w \mapsto w|E)$ は単射である．

証明　W が E を保つことは s_i の定義から明らか．制限写像の単射性に関しては，準同型定理により $w|E = \mathrm{id}$ ならば $w = 1$ となることを示せばよい．$w|E = \mathrm{id}$ とすると，$\Delta \subset E$ なので，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $w(\alpha) = \alpha$ である．よって $\ell(w) = |\Delta^+ \cap w(\Delta^-)| = 0$ であるが，ℓ の定義により $w = 1$ となる．　∎

したがって W は E の線形変換群とも見なすことができる．

E 上の対称双線形形式

$$(\, , \,) : E \times E \to \mathbf{K}$$

があるとき，これが W 不変であるための条件，すなわち

$$(w(\lambda), w(\mu)) = (\lambda, \mu) \qquad (w \in W,\ \lambda, \mu \in E)$$

を満たすための条件を考えてみよう．$(\, , \,)$ が W 不変であるとする．$(\alpha_j, \alpha_i) = (s_i(\alpha_j), s_i(\alpha_i))$ なので，s_i の定義から，$a_{ij}(\alpha_i, \alpha_i) = 2(\alpha_i, \alpha_j)$ が成立する．よって $d_i = (\alpha_i, \alpha_i)/2$ とおくとき，

$$(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij} \qquad (i, j \in I) \tag{2.105}$$

である．特に $(\, , \,)$ の対称性により

$$d_i a_{ij} = d_j a_{ji} \qquad (i, j \in I) \tag{2.106}$$

が成立する．逆に (2.106) を満たすスカラーの族 $\{d_i\}_{i \in I}$ が与えられたとき，E 上の対称双線形形式を (2.105) で定めれば，$i, j, k \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&(s_k\alpha_i, s_k\alpha_j) \\
=&(\alpha_i - \alpha_i(h_k)\alpha_k, \alpha_j - \alpha_j(h_k)\alpha_k) \\
=&(\alpha_i, \alpha_j) - \alpha_j(h_k)(\alpha_i, \alpha_k) - \alpha_i(h_k)(\alpha_j, \alpha_k) + \alpha_i(h_k)\alpha_j(h_k)(\alpha_k, \alpha_k) \\
=&(\alpha_i, \alpha_j) - a_{kj}d_k a_{ki} - a_{ki}d_k a_{kj} + a_{ki}a_{kj}d_k a_{kk} \\
=&(\alpha_i, \alpha_j)
\end{aligned}$$

となるので，この対称双線形形式は W 不変である．以上により，E 上の W 不変な対称双線形形式とは，(2.106) を満たすスカラーの族 $\{d_i\}_{i\in I}$ から (2.105) により定まるものに他ならないことがわかった．

$d_i=0$ $(i\in I)$ とすれば条件 (2.106) は満たされるが，このとき $(\ ,\ )$ は恒等的に 0 となる自明なものである．そこで，自明でない W 不変な対称双線形形式がいつ存在するかを考えてみよう．

(2.105) により，$a_{ij}=0$ ならば $(\alpha_i,\alpha_j)=0$ である．よって特に，i と j がディンキン図形の相異なる連結成分に属するときには，$(\alpha_i,\alpha_j)=0$ でなければならない．したがって，ディンキン図形の連結成分への分解に対応する添え字集合 I の分解を，$I=\bigsqcup_{r=1}^n I^{(r)}$ とし，$E^{(r)}=\sum_{i\in I^{(r)}}\mathbf{K}\alpha_i\subset E$ とおくとき，

$$E=\bigoplus_{r=1}^n E^{(r)},\qquad (E^{(r)},E^{(s)})=0\quad (r\neq s)$$

が成り立つ．また W は各 $E^{(r)}$ を保つが，さらに $i\notin I^{(r)}$ ならば $s_i|E^{(r)}=\mathrm{id}$ である．よって，はじめからディンキン図形が連結な場合，すなわち A が既約な場合を考えればよい．以下 A は既約であると仮定する．

(2.106) により $a_{ij}\neq 0$（したがって $a_{ji}\neq 0$）ならば，d_j は d_i の正有理数倍である．言い換えると，ディンキン図形で隣接する頂点 $i,j\in I$ において d_j は d_i の正有理数倍として一意的に定まるということになる．特に，隣接する頂点 $i,j\in I$ に関して $d_i=0$ ならば $d_j=0$ である．いま A は既約と仮定しているので，ディンキン図形は連結な図形である．よって，もしも $d_i=0$ となる $i\in I$ が 1 つでもあるとすると，任意の $j\in I$ に対して $d_j=0$ となるので，この場合 $(\ ,\ )=0$ である．したがって，E 上に 0 と異なる W 不変な対称双線形形式が存在するための必要十分条件は，(2.106) を満たす $\{d_i\}_{i\in I}\subset\mathbf{K}\setminus\{0\}$ が存在することである．なお，この場合，$a_{ij}\neq 0$ ならば d_j は d_i の正有理数倍になっているので，適当な 0 でない数 z をとって d_i を zd_i で置き換えることにより（これは対称双線形形式 $(\ ,\ )$ をその定数倍 $z(\ ,\ )$ で置き換えることに相当する），すべての d_i は正有理数であるとしてよい．したがってこの条件は (2.106) を満たす正有理数の族 $\{d_i\}_{i\in I}$ が存在することとも同値である．

2.41［定義］　A をカルタン行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ とする．正有理数の族 $\{d_i\}_{i\in I}$ に関して $d_ia_{ij}=d_ja_{ji}$ が任意の $i,j\in I$ について成立していると

き，A は対称化可能であるという（対角行列 D を $D=(\delta_{ij}d_i)_{i,j\in I}$ により定めるとき，DA は対称行列になる．これがそのネーミングの由来である）．

2.42 ［問題］　カルタン行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ において $|I|=2$ ならば，A は対称化可能であることを示せ．

以上の議論から次は明らかである．

2.43 ［命題］　$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ をカルタン行列とする．

(i) 次の (a), (b), (c) は同値である．

(a) A は対称化可能である．

(b) $E=\sum_{i\in I}\mathbf{K}\alpha_i$ 上の W 不変な対称双線形形式 $(\ ,\ )$ であって，任意の $i\in I$ に対して $(\alpha_i,\alpha_i)\in\mathbf{Q}_{>0}$ となるものが存在する．

(c) $E=\sum_{i\in I}\mathbf{K}\alpha_i$ 上の W 不変な対称双線形形式 $(\ ,\ )$ であって，任意の $i\in I$ に対して $(\alpha_i,\alpha_i)\neq 0$ となるものが存在する．

(ii) (i) における条件 (b)（条件 (c)）を満たす対称双線形形式 $(\ ,\ )$ は，$d_ia_{ij}=d_ja_{ji}$ を満たす正有理数の族 $\{d_i\}_{i\in I}$（$\{d_i\}_{i\in I}\subset\mathbf{K}\setminus\{0\}$）をとるとき，

$$(\alpha_i,\alpha_j)=d_ia_{ij}\qquad(i,j\in I)$$

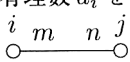
により与えられるものである．

(iii) さらに A は既約とする．このとき (i) における (a), (b), (c) は次の (d) とも同値である．

(d) E 上に 0 でない W 不変な対称双線形形式 $(\ ,\ )$ が存在する．

また E 上の 0 でない W 不変な対称双線形形式は，存在すれば，定数倍を除いて一意的である．

カルタン行列 A が対称化可能であるための必要十分条件は，そのディンキン図形の各頂点 $\overset{i}{\circ}$ に正有理数 d_i をうまく配置して，もしも $\overset{i}{\circ}$ と $\overset{j}{\circ}$ が



$$m=-a_{ij},\quad n=-a_{ji}$$

のように線分で結ばれているならば，d_i と d_j の比 $d_i : d_j$ が $n : m$ に一致するようにできることである．したがって，カルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が対称化可能であるための必要十分条件は，A のすべての既約成分が対称化可能であることであり，また既約なカルタン行列 A が対称化可能であるための必要十分条件は，そのディンキン図形の各頂点 $\overset{i}{\circ}$ に配置する正の有理数 d_i を，隣り合った 2 頂点 $\overset{i}{\circ}$ と $\overset{j}{\circ}$ に対して $d_i : d_j = -a_{ji} : -a_{ij}$ となるように次々と定めていくときに，矛盾が生じないことである．矛盾が生じるのは，I の元の列 $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ において $i_1 = i_r$ が成り立っているときに，上の手続きにより，d_{i_1} から順番に $d_{i_2}, d_{i_3}, \ldots$ と定めていくと，d_{i_r} がはじめの d_{i_1} と違ってしまう場合である．したがってカルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が対称化可能であるための必要十分条件は，I の元の有限列 $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ であって，$i_1 = i_r, i_k \neq i_{k+1}\,(k = 1, \ldots, r-1), a_{i_k i_{k+1}} a_{i_{k+1} i_k} \neq 0\,(k = 1, \ldots, r-1)$ となるものに対して，

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{r-1} i_r} = a_{i_r i_{r-1}} a_{i_{r-1} i_{r-2}} \ldots a_{i_2 i_1}$$

が常に成り立つことである．例えば例 2.3 のカルタン行列 A は対称化可能でない．

2.44 ［定義］　$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能カルタン行列とする．A をカルタン行列とする基本ルート・データ $(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ において，

$$E = \sum_{i \in I} \mathbf{K} \alpha_i \subset \mathfrak{h}^* \tag{2.107}$$

とおく．正有理数の族 $\{d_i\}_{i \in I}$ であって $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ を満たすものを 1 つとり，E 上の対称双線形形式を

$$(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbf{K} \qquad ((\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}) \tag{2.108}$$

により定め，これを E 上の**標準形式**（standard form）と呼ぶ．また 3 つ組み $(E, \{\alpha_i\}_{i \in I}, (\ ,\ ))$ を，対称化可能カルタン行列 A に付随する**基本ルート系**（fundamental root system）と呼ぶ．

命題 2.43 により，標準形式は，W 不変な双線形形式であって任意の $i \in I$ について $(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbf{Q}_{>0}$ なるものとして特徴づけられる．基本ルート系は，基

本ルート・データ $(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ の取り方によらずに決まっている．なお，基礎体 $\mathbf{K}$ を明示する必要のある場合には E を $E_{\mathbf{K}}$ と書くこともある．

次は明らかであろう．

2.45 [命題]　対称化可能カルタン行列 A が $A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)}$ と直和分解されているとする（よって各 $A^{(r)}$ も対称化可能カルタン行列である）．$(E^{(r)}, \{\alpha_i\}_{i\in I^{(r)}}, (\ ,\ ))$ を $A^{(r)}$ に付随する基本ルート系とするとき，

$$(\bigoplus_{r=1}^{n} E^{(r)}, \{\alpha_i\}_{i\in\bigsqcup_{r=1}^{n} I^{(r)}}, (\ ,\ ))$$

は A に付随する基本ルート系である．ただし $\bigoplus_{r=1}^{n} E^{(r)}$ 上の対称双線形形式は

$$(\sum_{r=1}^{n} \beta_r, \sum_{r=1}^{n} \gamma_r) = \sum_{r=1}^{n} (\beta_r, \gamma_r) \qquad (\beta_r, \gamma_r \in E^{(r)})$$

により定まるものとする．

2.46 [命題]　対称化可能カルタン行列に付随する基本ルート系 $(E, \{\alpha_i\}_{i\in I}, (\ ,\ ))$ において，

$$\lambda(\alpha^\vee) = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \qquad (\lambda \in E, \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}) \tag{2.109}$$

が成り立つ．特に

$$\lambda(h_i) = \frac{2(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \qquad (\lambda \in E, i \in I). \tag{2.110}$$

証明　先に (2.110) を示す．E の定義により，$\lambda = \alpha_j$ としてよいが，このとき

$$\alpha_j(h_i) = a_{ij} = \frac{2d_i a_{ij}}{2d_i} = \frac{2(\alpha_j, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

となり，確かに成り立っている．次に $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ とする．$w \in W$ であって $\alpha = w(\alpha_i)$ となるものをとる．このとき

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha^\vee) = \lambda(w(h_i)) = (w^{-1}(\lambda))(h_i) &= \frac{2((w^{-1}(\lambda)), \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \\ &= \frac{2(\lambda, w(\alpha_i))}{(w(\alpha_i), w(\alpha_i))} = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\end{aligned}$$

となるので，(2.109) も成立している．∎

2.47［命題］　$(E, \{\alpha_i\}_{i\in I}, (\ ,\ ))$ を，対称化可能カルタン行列に付随する基本ルート系とする．

(i) 任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}$ が成り立つ．

(ii) 任意の $\alpha \in \Delta_{\rm re}$ に対して $(\alpha, \alpha) > 0$ である．

(iii) 任意の $\alpha \in \Delta_{\rm im}$ に対して $(\alpha, \alpha) \leqq 0$ である．

証明　(i) 任意の $i, j \in I$ に対して $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij} \in \mathbf{Q}$ となることから明らかである．

(ii) 標準形式は W 不変なので，$\Delta_{\rm re}$ の定義と $(\alpha_i, \alpha_i) = 2d_i > 0$ から明らかである．

(iii) $\alpha \in \Delta_{\rm im}^+$ としてよい．

(2.99) により，$W(\alpha) \subset \Delta^+$ なので，

$$\mathrm{ht}(w(\alpha)) = \min\{\mathrm{ht}(x(\alpha)) | x \in W\}$$

なる $w \in W$ がとれる ((2.36) 参照)．$\beta = w(\alpha) = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i$ とおく．$\mathrm{ht}(\beta) \leqq \mathrm{ht}(s_i(\beta))$ なので，$s_i(\beta) = \beta - (2(\beta, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i))\alpha_i$ により $2(\beta, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i)$ は非正整数でなくてはならない．特に $(\beta, \alpha_i) \leqq 0$ である．したがって

$$(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = \sum_{i\in I} n_i(\beta, \alpha_i) \leqq 0$$

となる．∎

$\mathfrak{a}$ をリー代数とするとき，$\mathfrak{a}$ 上の対称双線形形式 $\kappa : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ であって

$$\kappa([z, x], y) + \kappa(x, [z, y]) = 0 \qquad (x, y, z \in \mathfrak{a})$$

を満たすもののことを $\mathfrak{a}$ 上の**不変形式**（invariant form）と呼ぶ．

2.48［例］　リー代数 $\mathfrak{a}$ の有限次元表現 $\rho : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ があるとき，$\mathfrak{a}$ 上の不変形式 $\kappa : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ が

$$\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(\rho(x)\rho(y))$$

により定まる（不変性は，補題 3.21 を用いて容易に示される）．□

2.49 [命題]　$\kappa : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ を $\mathfrak{a}$ 上の不変形式とする．$x \in \mathfrak{a}$ に関して $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ が局所ベキ零ならば，任意の $y, z \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\kappa(\exp(\mathrm{ad}(x))(y), \exp(\mathrm{ad}(x))(z)) = \kappa(y, z)$$

が成り立つ．

証明　仮定により，

$$\begin{aligned}\kappa(\exp(\mathrm{ad}(x))(y), z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\kappa(\mathrm{ad}(x)^n(y), z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}\kappa(y, \mathrm{ad}(x)^n(z)) \\ &= \kappa(y, \exp(\mathrm{ad}(-x))(z))\end{aligned}$$

となる．ここで z を $\exp(\mathrm{ad}(x))(z)$ で置き換えて求める結果を得る．　■

カッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ 上に，不変形式 $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{K}$ が存在するとする．

カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ への随伴作用に関するウェイト空間分解 $\mathfrak{g} = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda$ において，次が成立する：

$$\lambda + \mu \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\mu) = \{0\}. \tag{2.111}$$

実際，$x \in \mathfrak{g}_\lambda, y \in \mathfrak{g}_\mu$ とすると，$h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\lambda(h)\kappa(x, y) = \kappa([h, x], y) = -\kappa(x, [h, y]) = -\mu(h)\kappa(x, y)$$

となるが，$\lambda + \mu \neq 0$ ならば $\lambda(h) \neq -\mu(h)$ を満たす $h \in \mathfrak{h}$ が存在するので，$\kappa(x, y) = 0$ でなければならない．いまの場合，$\mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}$ への随伴作用に関するウェイト空間分解（ルート空間分解）は，

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha), \qquad (\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0)$$

により与えられるので，

$$\kappa(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha) = \{0\} \ (\alpha \in \Delta), \quad \kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = \{0\} \ (\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq -\beta) \tag{2.112}$$

である．

2.50 ［**補題**］　$\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ は W 不変である．すなわち任意の $w\in W$ に対して

$$\kappa(wh, wh') = \kappa(h, h') \qquad (h, h' \in \mathfrak{h})$$

が成り立つ．

証明　$w = s_i$ としてよい．このとき主張は命題 2.29(iv) と命題 2.49 により明らか．∎

以下 $\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ は非退化であるとする．

2.51 ［**注意**］　一般に，双線形写像 $\varphi: V_1\times V_2\to\mathbf{K}$ において次の2条件が成立するとき，φ は**非退化** (non-degenerate) であるという：

$$\varphi(v_1, V_2) = \{0\} \implies v_1 = 0, \qquad \varphi(V_1, v_2) = \{0\} \implies v_2 = 0.$$

$\mathfrak{h}$ は有限次元なので，ベクトル空間の同型写像

$$\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}^* \qquad (h\mapsto[h'\to\kappa(h, h')])$$

が定まる．この同型対応のもとで $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対応する $\mathfrak{h}$ の元を t_λ で表すことにする．すなわち

$$\kappa(t_\lambda, h) = \lambda(h) \qquad (h\in\mathfrak{h}) \tag{2.113}$$

により，t_λ を定義する．

2.52 ［**補題**］

(i) 同型写像 $\lambda\mapsto t_\lambda$ は W の作用を保つ．すなわち

$$t_{w\lambda} = wt_\lambda \qquad (w\in W, \lambda\in\mathfrak{h}^*). \tag{2.114}$$

(ii) $\alpha\in\Delta$ に対して

$$[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha \qquad (x\in\mathfrak{g}_\alpha, y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}). \tag{2.115}$$

証明　(i) $h\in\mathfrak{h}$ とすると，補題 2.50 により

$$\kappa(h, t_{w\lambda}) = w\lambda(h) = \lambda(w^{-1}h) = \kappa(w^{-1}h, t_\lambda) = \kappa(h, wt_\lambda).$$

(ii) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ なので，$[x, y] \in \mathfrak{h}$ であるが，$h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\kappa(\kappa(x,y)t_\alpha, h) = \alpha(h)\kappa(x,y) = \kappa([h,x],y) = \kappa([x,y],h)$$

なので，$\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ の非退化性から主張が従う． ∎

同型対応 $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}\,(\lambda \leftrightarrow t_\lambda)$ により，$\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h}^*$ に移して得られる，$\mathfrak{h}^*$ 上の対称双線形形式を $(\ ,\ ) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \to \mathbf{K}$ で表す．すなわち

$$(\lambda, \mu) = \kappa(t_\lambda, t_\mu) \qquad (\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*) \tag{2.116}$$

とする．

2.53 [命題]　$\mathfrak{h}^*$ 上の対称双線形形式 (2.116) の $E = \sum_{i\in I} \mathbf{K}\alpha_i$ への制限は W 不変で，$(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ $(i \in I)$ を満たす．

証明　W 不変性は補題 2.50 と補題 2.52(i) から明らか．補題 2.52 により，$h_i = [e_i, f_i] = \kappa(e_i, f_i)t_{\alpha_i}$ となる．$h_i \neq 0$ なので $\kappa(e_i, f_i) \neq 0$ であり，$t_{\alpha_i} = h_i/\kappa(e_i, f_i)$ が成り立つ．よって

$$(\alpha_i, \alpha_i) = \kappa(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_i}) = \alpha_i(t_{\alpha_i}) = \frac{\alpha_i(h_i)}{\kappa(e_i, f_i)} = \frac{2}{\kappa(e_i, f_i)} \neq 0$$

である． ∎

2.54 [定義]　$\mathfrak{g}$ 上の不変形式 κ であって，$\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ が非退化であり，対応する $\mathfrak{h}^*$ 上の対称双線形形式 (2.116) の $E = \sum_{i\in I} \mathbf{K}\alpha_i$ への制限が標準形式となるもののことを，$\mathfrak{g}$ 上の**標準不変形式** (standard invariant form) と呼ぶ．

命題 2.53 と命題 2.43 により，$\mathfrak{g}$ 上に標準不変形式が存在するならば，カルタン行列 A は対称化可能であることがわかった．

2.55 [定理*]　カッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi)$ 上に標準不変形式が存在するための必要十分条件は，基本ルート・データ Φ のカルタン行列が対称化可能であることである．またこの場合 $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ 上の標準不変形式は非退化である．

本書では証明は割愛する（さほど難しくない）．ただし，カルタン行列 A が有限型およびアフィン型の場合には，$\mathfrak{g}(\Phi)$ 上に非退化な標準不変形式が存在することを，後で示す．

2.56［注意］　(2.112) により，カッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}$ 上の標準不変形式 κ が非退化であるための必要十分条件は，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\kappa|\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ が非退化になることである．

6. 最高ウェイト表現

この節では，いわゆるヴァーマ加群等の最高ウェイト加群と呼ばれる $U(\mathfrak{g})$ 加群に関する初等的性質について述べる．

$\mathfrak{h}^*$ 上の半順序 $\geqq$ が

$$\lambda \geqq \mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda - \mu \in Q^+ \tag{2.117}$$

により定まる（Q^+ の定義は (2.35)）．これを $\mathfrak{h}^*$ 上の**標準半順序**（standard partial order）と呼ぶ．

2.57［定義］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 V であって，ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ と $v \in V$ に関して

$$v \in V_\lambda \setminus \{0\}, \qquad V = U(\mathfrak{g})v, \qquad e_i v = 0 \ (i \in I) \tag{2.118}$$

が成り立っているようなもののことを，λ を**最高ウェイト**（highest weight）にもつ**最高ウェイト加群**（highest weight module）と呼ぶ．また v を V の**最高ウェイト・ベクトル**（highest weight vector）と呼ぶ．

$U(\mathfrak{g})$ 加群 V と $\lambda \in \mathfrak{h}^*, v \in V$ に関して，(2.118) が成り立っているとする．$\mathfrak{g}$ の 3 角分解 (2.56) とポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理（定理 1.24）により，

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g}) &= U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^+) \\ &= \{\sum_k x_k y_k z_k (\text{有限和}) | x_k \in U(\mathfrak{n}^-), y_k \in U(\mathfrak{h}), z_k \in U(\mathfrak{n}^+)\} \end{aligned}$$

であるが，$\mathfrak{n}^+$ は $\{e_i\}_{i\in I}$ により生成されているので，$V = U(\mathfrak{g})v = U(\mathfrak{n}^-)v$ が成り立つ．$\mathfrak{n}^-$ は $\{f_i\}_{i\in I}$ により生成されているので，$f_i V_\mu \subset V_{\mu-\alpha_i}$ により，

$$V = \bigoplus_{\mu \leqq \lambda} V_\mu, \qquad V_{\lambda-\gamma} = \sum_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_r}=\gamma} \mathbf{K} f_{i_1}\cdots f_{i_r} v \tag{2.119}$$

が成立する．特に V はウェイト加群で（本章 3 節参照），$V_\lambda = \mathbf{K}v$ が成り立つ．したがって λ は，V のウェイトのうちで標準半順序に関して最大のものとして確定する．また $v \in V_\lambda$ は定数倍を除いて一意的に決まる．

2.58［定義］　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$U(\mathfrak{g})$ 加群 $M(\lambda)$ と $m_\lambda \in M(\lambda)_\lambda$ を

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/(\sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i), \tag{2.120}$$

$$m_\lambda = \overline{1} \tag{2.121}$$

により定める（ここで，$U(\mathfrak{g})$ は左からのかけ算により，左 $U(\mathfrak{g})$ 加群とみている）．$M(\lambda)$ を λ を最高ウェイトにもつ**ヴァーマ加群**（Verma module）と呼ぶ．

2.59［命題］

(i) 線形写像 $U(\mathfrak{n}^-) \to M(\lambda)$ $(u \mapsto um_\lambda)$ は全単射である．

(ii) $M(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である．また m_λ はその最高ウェイト・ベクトルである．

(iii) λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群は，$M(\lambda)$ の商 $U(\mathfrak{g})$ 加群と同型である．

証明

(i) $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ とおく．$[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] \subset \mathfrak{n}^+$ なので，$\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数である．$\mathfrak{b}$ 上の線形形式 $f : \mathfrak{b} \to \mathbf{K}$ を

$$f(h) = \lambda(h)\ (h \in \mathfrak{h}), \qquad f(x) = 0\ (x \in \mathfrak{n}^+)$$

により定める．f はリー代数の準同型写像であり，リー代数 $\mathfrak{b}$ の 1 次元表現を与える．さて

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} = \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i$$

であるが，$\mathfrak{n}^+$ は $\{e_i\}_{i\in I}$ により生成されているので，

$$\mathcal{J} = \sum_{x\in\mathfrak{b}} U(\mathfrak{b})(x - f(x))$$

とおくとき $\mathcal{I} = U(\mathfrak{g})\mathcal{J}$ が成り立つ．ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{b})$ なので，さらに $\mathcal{I} = U(\mathfrak{g})\mathcal{J} = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{b})\mathcal{J} = U(\mathfrak{n}^-)\mathcal{J}$ である．したがって $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \oplus U(\mathfrak{n}^-)\mathcal{J}$ を示せばよい．

まず $U(\mathfrak{b}) = \mathcal{J} \oplus \mathbf{K}$ を示そう．$U(\mathfrak{b})$ の任意の元は $x_1\cdots x_r$ $(x_k \in \mathfrak{b})$ の形の元の 1 次結合であるが，$\mathcal{J}$ を法として，

$$x_1\cdots x_r \equiv f(x_r)x_1\cdots x_{r-1} \equiv \cdots \equiv f(x_1)\cdots f(x_r) \in \mathbf{K}$$

となるので，$U(\mathfrak{b}) = \mathcal{J} + \mathbf{K}$ である．また f はリー代数 $\mathfrak{b}$ の 1 次元表現を与えているので，包絡代数 $U(\mathfrak{b})$ の普遍写像性質により，結合代数の準同型写像 $F : U(\mathfrak{b}) \to \mathbf{K}$ が $F(b) = f(b)$ $(b \in \mathfrak{b})$ により定まる．ところが F の定義から $F(\mathcal{J}) = \{0\}$ なので，明らかに $\mathcal{J} \cap \mathbf{K} = \{0\}$．以上により $U(\mathfrak{b}) = \mathcal{J} \oplus \mathbf{K}$ が示された．

したがって $\mathcal{J}$ の基底 $\{z_r\}$ を 1 つ選ぶとき，$\{1\} \sqcup \{z_r\}$ が $U(\mathfrak{b})$ の基底になる．ところで，ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により，$U(\mathfrak{n}^-)$ のある特別なタイプの基底 $\{x_p\}$ と $U(\mathfrak{b})$ のある特別なタイプの基底 $\{y_q\}$ に関して $\{x_p y_q\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底になることがわかっていた．よって $\{y_q\}$ を $\{1\} \sqcup \{z_r\}$ で置き換えて $\{x_p\} \sqcup \{x_p z_r\}$ を考えるとき，これも $U(\mathfrak{g})$ の基底になることが容易にわかる[6]．ところが $\{x_p\}$ が $U(\mathfrak{n}^-)$ の基底で，$\{x_p z_r\}$ が $U(\mathfrak{n}^-)\mathcal{J}$ の基底になるので，$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \oplus U(\mathfrak{n}^-)\mathcal{J}$ が成り立つ．

(ii) $m_\lambda \in M(\lambda)_\lambda$，$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})m_\lambda$，$e_i m_\lambda = 0$ $(i \in I)$ は定義から明らか．(i) より $M(\lambda) \neq \{0\}$ であるが $M(\lambda) = U(\mathfrak{g})m_\lambda$ なので $m_\lambda \neq 0$ でなければならない．

(iii) V を λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群，v をその最高ウェイト・ベクトルとする．$\varphi : U(\mathfrak{g}) \to V$ を $\varphi(u) = uv$ により定める．$U(\mathfrak{g})$ を左かけ算により $U(\mathfrak{g})$ 加群と思うとき，φ は $U(\mathfrak{g})$ 加群の準同型写像である．また

[6] テンソル積を使って説明すれば，次のようになる：ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-) \otimes U(\mathfrak{b})$ である．よって $U(\mathfrak{n}^-)$ の任意の基底 $\{u_k\}$ と $U(\mathfrak{b})$ の任意の基底 $\{v_\ell\}$ に対して $\{u_k v_\ell\}$ は $U(\mathfrak{g})$ の基底になる．

$\varphi(h-\lambda(h)) = hv - \lambda(h)v = 0\ (h \in \mathfrak{h}), \varphi(e_i) = e_iv = 0\ (i \in I)$ により，

$$\sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$$

である．したがって $U(\mathfrak{g})$ 加群の準同型写像 $\overline{\varphi} : M(\lambda) \to V$ が，$\overline{\varphi}(um_\lambda) = uv\ (u \in U(\mathfrak{g}))$ により定まる．$V = U(\mathfrak{g})v$ なので $\overline{\varphi}$ は全射である．したがって V は $M(\lambda)$ の商 $U(\mathfrak{g})$ 加群である． ■

ここで $M(\lambda)$ の指標を求めてみよう．$U(\mathfrak{n}^-)$ を $\mathfrak{h}$ の随伴作用 $\mathrm{ad}(h)(y) = hy - yh\ (h \in \mathfrak{h},\ y \in U(\mathfrak{n}^-))$ により $U(\mathfrak{h})$ 加群と見なす．$\mathrm{ad}(h)(f_{i_1}\cdots f_{i_r}) = -(\sum_{k=1}^r \alpha_{i_k})(h) f_{i_1}\cdots f_{i_r}$ なので，$U(\mathfrak{n}^-)$ はウェイト加群で，

$$U(\mathfrak{n}^-) = \bigoplus_{\gamma\in Q^+} U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$$

と分解される．$h \in \mathfrak{h},\ y \in U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ のとき，$hym_\lambda = (\mathrm{ad}(h)(y))m_\lambda + yhm_\lambda = (\lambda-\gamma)(h)ym_\lambda$ となるので，命題 2.59(i) により，

$$M(\lambda) = \bigoplus_{\gamma\in Q^+} M(\lambda)_{\lambda-\gamma},$$

$$M(\lambda)_{\lambda-\gamma} = U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}m_\lambda, \quad \dim M(\lambda)_{\lambda-\gamma} = \dim U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$$

が成り立つ．したがって，各 $\gamma \in Q^+$ に対して $\dim U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ を求めればよい．$\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ であった．各 $\alpha \in \Delta^+$ に対して $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ の基底 $\{y_{(\alpha,k)} | k = 1, \ldots, d_\alpha\}$ を 1 つずつ選ぶ（$d_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = \dim \mathfrak{g}_\alpha$）．$\Xi = \{(\alpha, k) | \alpha \in \Delta^+, k = 1, \ldots, d_\alpha\}$ とおき，$\xi = (\alpha, k) \in \Xi$ に対して，$\overline{\xi} = \alpha$ とおく．集合 Ξ 上の全順序を 1 つ決めるとき，ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により，順序を保つ単項式 $y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r}\ (\xi_1 \leqq \cdots \leqq \xi_r)$ の全体が $U(\mathfrak{n}^-)$ の基底となる．$y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r} \in U(\mathfrak{n}^-)_{-\sum_j \overline{\xi}_j}$ により，$U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ は

$$\{y_{\xi_1}\cdots y_{\xi_r} | \xi_1 \leqq \cdots \leqq \xi_r, \sum_j \overline{\xi}_j = \gamma\}$$

を基底とするベクトル空間であり，その次元は集合

$$\{(\xi_1, \ldots, \xi_r) | \xi_1 \leqq \cdots \leqq \xi_r, \sum_j \overline{\xi}_j = \gamma\}$$

の元の数と一致する．各 $\alpha \in \Delta^+$ を d_α 個ずつ含む重複度つき集合を $\tilde{\Delta}^+$ で表す．$\alpha \in \Delta^+$ に対して，$\bar{\xi} = \alpha$ となる $\xi \in \Xi$ は d_α 個あるので，集合 Ξ は $\tilde{\Delta}^+$ と1対1に対応する．よって $\dim U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ は，γ を重複度つき集合 $\tilde{\Delta}^+$ の元の和として表す表し方の数

$$P(\gamma) = \sharp\{(n_\alpha)_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} | n_\alpha \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}, \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} n_\alpha \alpha = \gamma\} \tag{2.122}$$

と一致する（この $P(\gamma)$ を Kostant の分割関数と呼ぶ）．以上により $M(\lambda)$ の指標は

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = \sum_{\gamma \in Q^+} P(\gamma) \mathbf{e}^{\lambda - \gamma} \tag{2.123}$$

により与えられることがわかった．

以下，$\gamma = \sum_{i \in I} m_i \alpha_i \in Q^+$ に対して，$\mathbf{e}^{-\gamma}$ は形式的ベキ級数環 $\mathbf{Z}[[\mathbf{e}^{-\alpha_i} | i \in I]]$ の元 $\prod_{i \in I} (\mathbf{e}^{-\alpha_i})^{m_i}$ を表すものと思うことにする．このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \mathbf{e}^{-\alpha})^{d_\alpha}} &= \prod_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} \frac{1}{(1 - \mathbf{e}^{-\alpha})} \\ &= \prod_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} (1 + \mathbf{e}^{-\alpha} + \mathbf{e}^{-2\alpha} + \cdots) \\ &= \sum_{\gamma \in Q^+} P(\gamma) \mathbf{e}^{-\gamma} \end{aligned}$$

なので，$\mathbf{Z}[[\mathbf{e}^{-\alpha_i} | i \in I]]$ 上の階数1の自由加群 $\mathbf{Z}[[\mathbf{e}^{-\alpha_i} | i \in I]] \mathbf{e}^\lambda$ における式

$$\mathrm{ch}(M(\lambda)) = \frac{\mathbf{e}^\lambda}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \mathbf{e}^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}} \tag{2.124}$$

が成り立つ．

2.60［補題］　任意の最高ウェイト加群は最大真部分加群をもつ．

証明　V を λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群とすると，V はウェイト空間分解 $V = \bigoplus_{\mu \leqq \lambda} V_\mu$ をもち，$\dim V_\lambda = 1, V = U(\mathfrak{g}) V_\lambda$ が成り立つのであった．K を V の部分加群とすると，K もウェイト加群なので $K = \bigoplus_{\mu \leqq \lambda} (K \cap V_\mu)$ とウェイト空間分解される．いま $K \cap V_\lambda \neq \{0\}$ とすると，$\dim V_\lambda = 1$ により $K \supset V_\lambda$ となり，$V = U(\mathfrak{g}) V_\lambda$ により $K = V$ が従う．つまり K が真部分加群

ならば $K \cap V_\lambda = \{0\}$，したがって $K \subset \bigoplus_{\mu<\lambda} V_\mu$ が成り立つ．よって V の真部分加群 K すべての和 K_0 も $\bigoplus_{\mu<\lambda} V_\mu$ に含まれる真部分加群となり，これが最大の真部分加群である， ∎

$M(\lambda)$ の最大真部分加群を $K(\lambda)$ とし，

$$L(\lambda) = M(\lambda)/K(\lambda), \tag{2.125}$$

$$\ell_\lambda = \overline{m_\lambda} \in L(\lambda) \tag{2.126}$$

とおく．このとき明らかに，$L(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群で，ℓ_λ はその最高ウェイト・ベクトルである．

2.61 [命題]　λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群は $L(\lambda)$ と同型である．

証明　L を λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群とする．命題 2.59(iii) により，L は $M(\lambda)$ の商加群である．したがって $M(\lambda)$ の真部分加群 K に関して $L = M(\lambda)/K$ と書かれる．$K \subset K(\lambda)$ であるが，もしも $K \neq K(\lambda)$ とすると，L は自明でない部分加群 $K(\lambda)/K$ をもつことになり矛盾．したがって $K = K(\lambda)$，すなわち $L = L(\lambda)$ が成立する． ∎

$K(\lambda)$ が実際にどうなるかは，その定義からはわからない．したがって $L(\lambda)$ が実際にどうなるかもすぐにはわからず，ここに難しさがある．1 つ簡単にわかることとして，次を示しておこう．

2.62 [命題]　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ と $i \in I$ に関して $\lambda(h_i)$ が非負整数であるとする．このとき $f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda$ は $M(\lambda)$ の最大真部分加群 $K(\lambda)$ に含まれる．言い換えると，$L(\lambda)$ において $f_i^{\lambda(h_i)+1}\ell_\lambda = 0$ が成立する．

証明　(2.69) の同型写像 $\varphi_i : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \mathfrak{a}_i = \mathbf{K}h_i + \mathbf{K}e_i + \mathbf{K}f_i$ により $V = M(\lambda)$ を $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群と思うとき，$m_\lambda \in V_{\lambda(h_i)}$ である．よって補題 1.60 により，$e_i(f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda) = 0$ が成立する．また $j \neq i$ とすると，$[e_j, f_i] = 0$ により $e_j(f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda) = f_i^{\lambda(h_i)+1} e_j m_\lambda = 0$ である．したがって任意の $j \in I$ に対して $e_j(f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda) = 0$ が成立する．また $f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda \in M(\lambda)_{\lambda-(\lambda(h_i)+1)\alpha_i}$

なので，$K = U(\mathfrak{g})f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$ は $\lambda - (\lambda(h_i)+1)\alpha_i$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である．よって

$$K = \bigoplus_{\mu \leqq \lambda - (\lambda(h_i)+1)\alpha_i} K_\mu \subset \bigoplus_{\mu \leqq \lambda - (\lambda(h_i)+1)\alpha_i} M(\lambda)_\mu \subsetneqq M(\lambda)$$

となり，したがって K は真部分加群である．$K(\lambda)$ は最大の真部分加群だったので $f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda \in K \subset K(\lambda)$ が従う．∎

2.63 [命題]　V を $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群とし，v をその最高ウェイト・ベクトルとする．V が可積分であるための必要十分条件は，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負整数でかつ $f_i^{\lambda(h_i)+1}v = 0$ となることである．

証明　V が可積分であるとする．$i \in I$ に対して

$$h_i v = \lambda(h_i)v, \qquad e_i v = 0$$

であるが，(2.69) の同型写像 $\varphi_i : \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}) \to \mathfrak{a}_i = \mathbf{K}h_i + \mathbf{K}e_i + \mathbf{K}f_i$ により $U(\mathfrak{a}_i)v$ を有限次元 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群と思い，補題 1.61 を適用すると，$\lambda(h_i)$ が非負整数で，しかも $f_i^{\lambda(h_i)+1}v = 0$ となることがわかる．

逆に，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負整数で，しかも $f_i^{\lambda(h_i)+1}v = 0$ が成り立っているとする．このとき，任意の $u \in V$ に対して $\dim U(\mathfrak{a}_i)u < \infty$ となることを示せばよい[7]．$\dim U(\mathfrak{a}_i)u < \infty$ となる $u \in V$ の全体は V の部分空間をなすので，ある $\mu \in \mathfrak{h}^*$, $\mu \leqq \lambda$ に関して $u \in V_\mu$ であるとしてよい．このとき

$$U(\mathfrak{a}_i)u = \sum_{p,q,r} \mathbf{K} f_i^p e_i^q h_i^r u = \sum_{q=0}^{\infty} \mathbf{K}[f_i] e_i^q u$$

となる $(\mathbf{K}[f_i] = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{K} f_i^p)$．ここで $e_i^q u \in V_{\mu+q\alpha_i}$ であるが，$\mu + q\alpha_i \leqq \lambda$ すなわち $q\alpha_i \leqq \lambda - \mu$ でなければ $V_{\mu+q\alpha_i} = 0$ となる．したがって有限個の q を除いて，$e_i^q u = 0$ である．よって，任意の $u \in V_\mu$ $(\mu \in \mathfrak{h}^*,\ \mu \leqq \lambda)$ に対して $f_i^p u = 0$ $(p \gg 0)$ を示せばよい．$u = v$ の場合は，仮定により成り立っている．

[7] これは $\mathfrak{a}_i$ の $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現が局所有限であることと，$\dim U(\mathfrak{a}_i)v < \infty$ から容易に従うことであるが，ここでは，後に述べる量子群の場合でも通用するように，わざと回りくどい証明を述べる．

$V=U(\mathfrak{n}^-)v$ なので，$u\in V_\mu, i,j\in I, p$ に関して，$f_i^p u=0$ が成立しているときに，$f_i^q f_j u<\infty\ (q\gg 0)$ を示せばよい．$i=j$ なら明らか．$i\neq j$ とする．簡単のため $N=1-a_{ij}$ とおく．$\mathrm{ad}(f_i)^N(f_j)=0$ なので，$U(\mathfrak{g})$ において

$$\sum_{p=0}^{N}(-1)^{N-p}\binom{N}{p}f_i^p f_j f_i^{N-p}=0$$

が成り立つ．よって特に

$$f_i^N f_j\in \mathbf{K}[f_i]f_j\mathbf{K}[f_i]f_i$$

である．これから m に関する帰納法で $f_i^{Nm}f_j\in \mathbf{K}[f_i]f_j\mathbf{K}[f_i]f_i^m$ がわかる．特に $f_i^{Np}f_j u\in \mathbf{K}[f_i]f_j\mathbf{K}[f_i]f_i^p u=\{0\}$ である．以上により，V が $U(\mathfrak{a}_i)$ 加群として局所有限であることがわかった．∎

命題 2.62 と命題 2.63 から次が従う．

2.64 [系]　$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に関して，$L(\lambda)$ が可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群になるための必要十分条件は，任意の $i\in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負の整数になることである．

最後に，反変形式を用いた $K(\lambda)$ の記述を与えておこう[8]．

$\mathfrak{g}$ の反自己同型 $x\mapsto {}^t x$ が，

$${}^t h=h\ (h\in\mathfrak{h}),\quad {}^t e_i=f_i,\quad {}^t f_i=e_i\quad (i\in I)$$

により定まる．これを拡張して，$U(\mathfrak{g})$ の反自己同型 $u\mapsto {}^t u$ が，

$${}^t(x_1\cdots x_n)={}^t x_n\cdots {}^t x_1\qquad (x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{g})$$

により定まる．一般に，$U(\mathfrak{g})$ 加群 V 上の対称双線形形式 $\chi: V\times V\to\mathbf{K}$ に関して，

$$\chi(uv_1,v_2)=\chi(v_1,{}^t uv_2)\qquad (u\in U(\mathfrak{g}), v_1,v_2\in V)$$

が成り立つとき，これを V 上の**反変形式**（contravariant form）と呼ぶ．

---

[8] 反変形式に関することは，付録 B の第 3, 4 節で用いるのみなので，不必要なら読み飛ばしも差し支えない．

2.65［補題］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 V 上に，反変形式 $\chi : V \times V \to \mathbf{K}$ が与えられているとする．V がウェイト加群ならば，任意の $\mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$, $\mu \neq \nu$ に対して $\chi(V_\mu, V_\nu) = \{0\}$ が成り立つ．

証明　$v_1 \in V_\mu, v_2 \in V_\nu$ とすると，任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\mu(h)\chi(v_1, v_2) = \chi(hv_1, v_2) = \chi(v_1, {}^t hv_2) = \chi(v_1, hv_2) = \nu(h)\chi(v_1, v_2)$$

となり，これから明らかである．∎

2.66［命題］　M を最高ウェイト λ の最高ウェイト加群とする．

(i) M 上に 0 でない反変形式が定数倍を除いて一意的に存在する．

(ii) $\chi : M \times M \to \mathbf{K}$ を 0 でない反変形式とする．このとき，χ の根基 $K = \{m \in M | \chi(m, M) = 0\}$ は，M の最大真部分加群である．特に，$K(\lambda)$ は $M(\lambda)$ 上の 0 でない反変形式の根基と一致する．また，$L(\lambda)$ 上の 0 でない反変形式は非退化である．

証明　$\hat{m}$ を M の最高ウェイト・ベクトルとする．

まず，反変形式の一意性を示す．M 上に反変形式 $\chi : M \times M \to \mathbf{K}$ が存在するとする．$M = U(\mathfrak{g})\hat{m}$ であるが，$u_1, u_2 \in M$ に対して，$\chi(u_1\hat{m}, u_2\hat{m}) = \chi(\hat{m}, {}^t u_1 u_2 \hat{m})$ となるので，χ は $\chi(\hat{m}, u\hat{m})$ $(u \in U(\mathfrak{g}))$ から一意的に定まる．さて，ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により，$U(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+) \oplus U(\mathfrak{h})$ と直和分解されるが，$u \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+$ ならば $u\hat{m} = 0$ である．また $u \in \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g})$ ならば，$u\hat{m} \in \sum_{\mu < \lambda} M_\mu$ なので，補題 2.65 により $\chi(\hat{m}, u\hat{m}) = 0$ となる．結合代数の準同型写像 $\epsilon_\lambda : U(\mathfrak{h}) \to \mathbf{K}$ を $\epsilon_\lambda(h) = \lambda(h)$ $(h \in \mathfrak{h})$ により定めるとき，$u \in U(\mathfrak{h})$ に対して $\chi(\hat{m}, u\hat{m}) = \epsilon_\lambda(u)\chi(\hat{m}, \hat{m})$ が成り立つ．したがって，直和分解 $U(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}^+) \oplus U(\mathfrak{h})$ に関する $U(\mathfrak{h})$ への射影を $p : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{h})$ とすると，結局

$$\chi(u_1\hat{m}, u_2\hat{m}) = (\epsilon_\lambda \circ p)({}^t u_1 u_2)\chi(\hat{m}, \hat{m})$$

でなくてはならない．以上により，0 でない反変形式 χ は，存在すれば定数倍を除いて一意的で，これに関して $\chi(\hat{m}, \hat{m}) \neq 0$ が成り立つことがわかった．

また，M 上に 0 でない反変形式 χ があるとすると，$m \in M$ に関して

$$\chi(m, U(\mathfrak{g})\hat{m}) = \{0\} \iff \chi(U(\mathfrak{g})m, \hat{m}) = \{0\} \iff U(\mathfrak{g})m \subset \sum_{\mu<\lambda} M_\mu$$

が成り立つ（ここで $\chi(\hat{m}, \hat{m}) \neq 0$ と，補題 2.65 を用いた）．最初の条件は m が χ の根基に含まれることを意味し，最後の条件は m が M の最大真部分加群に含まれることと同値なので，0 でない反変形式の根基は最大真部分加群と一致することが示された．

最後に，0 でない反変形式が存在することを示そう．$M(\lambda)$ 上の双線形形式 χ を，

$$\chi(u_1 m_\lambda, u_2 m_\lambda) = (\epsilon_\lambda \circ p)({}^t u_1 u_2) \qquad (u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g}))$$

により矛盾なく定めることができる．実際，

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/\mathcal{I}, \qquad \mathcal{I} = \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i$$

なので，$u_1 \in \mathcal{I}$ または $u_2 \in \mathcal{I}$ のときに $(\epsilon_\lambda \circ p)({}^t u_1 u_2) = 0$ となることを示せばよいが，これは定義から簡単にわかることである．また，このようにして定まった χ が対称で，反変形式の条件を満たすことも，${}^{tt}u = u$ と p, ϵ_λ の定義から容易に導かれる．以上により，$M(\lambda)$ 上に 0 でない反変形式 χ が存在することがわかった．$\pi : M(\lambda) \to M$ を全射準同型写像とする．先ほど示したことにより，χ の根基は $K(\lambda)$ と一致するので，$\mathrm{Ker}(\pi)$ は π の根基に含まれる．したがって $M \cong M(\lambda)/\mathrm{Ker}(\pi)$ 上の，0 でない対称双線形形式 χ_M が，$\chi_M(\pi(m_1), \pi(m_2)) = \chi(m_1, m_2)$ により定まり，反変形式となる．　∎

ノート

本書では順序が逆転しているが，カッツ・ムーディ・リー代数は，次章で述べる標数 0 の代数閉体上の有限次元単純リー代数の無限次元への自然な拡張として，カッツとムーディにより独立に導入されたものである（Kac[20], Moody[38]）．有限次元単純リー代数の生成元と基本関係式による記述はセールによるが（Serre[45]），カッツとムーディは，これを拡張することによりリー代数の理論の新境地を切り開いたのであった．

引き続き第 3 章および第 4 章において，カッツ・ムーディ・リー代数の特別な場合である，有限次元単純リー代数とアフィン・リー代数について詳しく述べるが，本章で述べたのはそのために必要な最小限の基本事項のみである．一般のカッツ・ムーディ・リー代数に関する重要な結果であって，この章では割愛したことも多いが，これに関しては標準的な教科書 Kac[22] や，Moody-Pianzola[39]，脇本 [48] などを参照されたい．

3

有限次元単純リー代数

カッツ・ムーディ・リー代数が有限次元になる場合を考えることにより，一連の有限次元単純リー代数が得られる．実は，基礎体が（標数 0 の）代数閉体の場合には，有限次元単純リー代数はこれらで尽きることが知られている．特に，そのうちで古典型と呼ばれる有限次元単純リー代数に関しては，行列を用いた具体的表示を与える．

また，後半では，このクラスのリー代数の有限次元表現論を展開し，完全可約性，既約表現の分類，既約表現の指標公式について述べる．

1. 有限次元カッツ・ムーディ・リー代数

カッツ・ムーディ・リー代数が有限次元になる場合について考える．

$\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ を基本ルート・データ，$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ をそのカルタン行列とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ を対応するカッツ・ムーディ・リー代数とする．$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ を基底とする $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間を $E_{\mathbf{R}}$ とおく．ワイル群 W は $E_{\mathbf{Q}} = \sum_{i\in I} \mathbf{Q}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ に作用しているので，その係数拡大である $E_{\mathbf{R}}$ にも自然に作用している．またルートの集合 Δ は $E_{\mathbf{Q}}$ に含まれているので，$E_{\mathbf{R}}$ の部分集合と思える[1]．

まず $\mathfrak{g}$ が有限次元であると仮定する．$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ と分解されるので，Δ は有限集合である．ワイル群 W は Δ を保つので，W から Δ の置換群への群の準同型写像が定まるが，これは単射である．実際，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $w\alpha = \alpha$ とすると，命題 2.39 により $\ell(w) = |\Delta^+ \cap w(\Delta^-)| = 0$ となり，したがって $w = 1$ である．よってワイル群 W は有限集合 Δ の置換群と思

[1] 一般の標数 0 の体 $\mathbf{K}$ の上で考えているときに，実数体 $\mathbf{R}$ を持ち出すのを奇異に感じる読者もいるであろうが，$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間のほうがイメージを作りやすいという利点もある．この後の議論は $E_{\mathbf{R}}$ の代わりに $E_{\mathbf{Q}}$ を用いても全く同じなので，$\mathbf{Q}$ 上で考えても構わない．

うこともできる．特に W は有限群である．

$E_{\mathbf{R}}$ 上に W 不変な正定値内積が存在することを示そう．まず $E_{\mathbf{R}}$ 上の正定値対称双線形形式

$$(\ , \ )' : E_{\mathbf{R}} \times E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$$

を任意に1つとる．例えば

$$\Big(\sum_{i\in I} n_i\alpha_i, \sum_{i\in I} m_i\alpha_i\Big)' = \sum_{i\in I} n_i m_i$$

とすればよい．そこで $E_{\mathbf{R}}$ 上に新たな対称双線形形式を

$$(\ , \ ) : E_{\mathbf{R}} \times E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}, \qquad (\lambda,\mu) = \sum_{w\in W} (w\lambda, w\mu)'$$

により定める．これは明らかに W 不変で，しかも正定値である．すなわち

$$(w\lambda, w\mu) = (\lambda,\mu) \qquad (w\in W, \lambda,\mu\in E_{\mathbf{R}}),$$

$$(\lambda,\lambda) \geqq 0 \quad (\lambda\in E_{\mathbf{R}}), \qquad \lambda\in E_{\mathbf{R}}, (\lambda,\lambda)=0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

したがって命題2.43により，カルタン行列 A は対称化可能で，$E_{\mathbf{R}}$ 上の標準形式は正定値であることがわかった．

逆に，基本ルート・データ $\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ において，そのカルタン行列 A が対称化可能で，しかも $E_{\mathbf{R}}$ 上の標準形式 $(\ , \ )$ は正定値であるとする．このとき対応するカッツ・ムーディ・リー代数は有限次元になることを示そう．

$\alpha \in \Delta_{\mathrm{im}}$ とすると，命題2.47により (α,α) は非正の有理数でなければならない．これは $(\ , \ )$ が正定値であることに矛盾する．よって $\Delta = \Delta_{\mathrm{re}}$ である．

次に Δ_{re} が有限集合であることを示そう．$\alpha\in\Delta_{\mathrm{re}}$ とする．$(\ , \ )$ が W 不変であることから，(α,α) はある $i\in I$ に対する $(\alpha_i,\alpha_i) > 0$ と一致する．よって (α,α) のとり得る値は有限個しかない．したがって，任意の正の実数 N に対して，$\alpha\in Q = \sum_{i\in I}\mathbf{Z}\alpha_i$ であって，$(\alpha,\alpha)\leqq N$ を満たすものが有限個しかないことを示せばよい．これは，次から従う．

3.1［補題］　V を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，正定値対称双線形形式 $(\ , \ ) : V\times V \to \mathbf{R}$ が与えられているとする．また Λ を V の格子とする（す

なわち V の基底 $v_1, \dots, v_n$ であって，$\Lambda = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Z} v_k$ を満たすものがあるとする)．さらに N を正の実数とする．このとき，$v \in \Lambda$ であって $(v, v) \leqq N$ を満たすものは，有限個しかない．

証明　直感的には明らかであろう．$\{v \in \Lambda | (v, v) \leqq N\}$ は疎なコンパクト集合なので有限集合であるというのが，理由づけとして最も簡単な言い方であるが，より初等的証明を望む読者は各自試みられよ．　■

以上により Δ が有限集合であることがわかった．また W は Δ の置換群と見なせるので，ワイル群 W が有限群であることもわかった．

さて $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ と分解されるので，

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + |\Delta| < \infty$$

が示された（$\Delta = \Delta_{\mathrm{re}}$ と $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}} \Rightarrow \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ を用いた)．よって $\mathfrak{g}$ は有限次元となる．

対称化可能なカルタン行列 A が，$A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)}$ と直和分解されているものとする．このとき，各 $A^{(r)}$ も対称化可能なカルタン行列である．命題 2.45 により，A に付随する $\mathbf{R}$ 上の基本ルート系においてその標準形式 $(\ ,\ )$ が正定値になるための必要十分条件は，任意の r に対して，$A^{(r)}$ に付随する $\mathbf{R}$ 上の基本ルート系においてその標準形式 $(\ ,\ )$ が正定値になることである．

3.2 ［定義］　$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を既約な対称化可能カルタン行列とする．A に付随する $\mathbf{R}$ 上の基本ルート系 $(E_{\mathbf{R}}, \{\alpha_i\}_{i \in I}, (\ ,\ ))$ において，その標準形式 $(\ ,\ )$ が正定値になるとき，A を**有限型カルタン行列**（Cartan matrix of finite type）と呼ぶ．

以上の議論により次が得られた．

3.3 ［定理］　$\Phi = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I})$ を基本ルート・データ，$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ をそのカルタン行列とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ を対応するカッツ・ムーディ・リー代数とする．

(i) $\mathfrak{g}$ が有限次元になるための必要十分条件は，A のすべての既約成分が有限型カルタン行列（特に対称化可能）となることである．

(ii) A のすべての既約成分は有限型カルタン行列であるとする．このとき $\Delta = \Delta_{\mathrm{re}}$ である．また W は有限群である．さらに $\mathfrak{g}$ の次元は

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + |\Delta|$$

により与えられる．

基本ルート・データ $(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ において，そのカルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ のすべての既約成分は有限型カルタン行列であるとする．すなわち対応するカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ は有限次元であるとする．このとき $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h} + |\Delta|$ であるが，$\Delta = \Delta_{\mathrm{re}} = \bigcup_{i\in I} W(\alpha_i)$ なので，$\dim \mathfrak{g}$ は基本ルート・データ $(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ だけから一意的に定まる．我々は，実は 2 つのリー代数 $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi), \mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ をともに $\mathfrak{g}(\Phi)$ と書いて同列に論じてきたのだが，いま述べたことから $\dim \mathfrak{g}_{\max}(\Phi) = \dim \mathfrak{g}_{\min}(\Phi) < \infty$ が成立している．全射準同型写像 $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi) \to \mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ が存在するので，実は 2 つのリー代数 $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi), \mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ は同じものであることがわかった．以上により次が示された．

3.4 [定理]　基本ルート・データ $(\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ において，そのカルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ のすべての既約成分は有限型カルタン行列であるとする．このとき，$\mathfrak{g}_{\max}(\Phi) \cong \mathfrak{g}_{\min}(\Phi)$ が成り立つ．

A をカルタン行列であってその任意の既約成分は有限型であるものとする．A に付随する $\mathbf{R}$ 上の基本ルート系 $(E_{\mathbf{R}}, \{\alpha_i\}_{i\in I}, (\ ,\ ))$ において，$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ を対応するカッツ・ムーディ・リー代数のルートの集合 $\Delta = \{w(\alpha_i) | w \in W, i \in I\}$ で置き換えて得られる 3 つ組み $\Psi = (E_{\mathbf{R}}, \Delta, (\ ,\ ))$ は以下の条件を満たす：

(a) $E_{\mathbf{R}}$ は $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間である．

(b) Δ は $E_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ の有限部分集合であって，$E_{\mathbf{R}}$ のすべての元は Δ の元の線形結合として書ける．

(c) $(\ ,\ )$ は $E_{\mathbf{R}}$ 上の正定値な対称双線形形式である．

(d) $\alpha \in \Delta$ ならば $\mathbf{Z}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$．

(e) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbf{Z}$ が成り立つ．

(f) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して $\beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Delta$ が成り立つ．

一般に，3 つ組み $\Psi = (E_{\mathbf{R}}, \Delta, (\ ,\ ))$ であって，上の (a),...,(f) を満たすもののことを，（抽象）ルート系と呼ぶ．実は，任意の抽象ルート系は，カルタン行列であってその任意の既約成分が有限型であるものから得られるものと同型であることがわかる．ある意味では，抽象ルート系のほうが基本ルート系よりも対称性の高い自然な対象なのであるが，本書ではここでその定義を述べるに留めることとする．

3.5 [命題]　カルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ のすべての既約成分は有限型であるとする．

(i) A は正則行列である．

(ii) A をカルタン行列にもつ基本ルート・データ Φ_A が

$$\Phi_A = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i \in I}, \{\alpha_i\}_{i \in I}), \quad \mathfrak{h} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{K} h_i, \quad \alpha_j(h_i) = a_{ij}$$

により定まる．またこれに関して $\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{K}\alpha_i$ が成り立つ．

証明　(i) $E_{\mathbf{R}}$ 上の標準形式 $(\ ,\ )$ に関して $a_{ij} = \alpha_j(h_i) = 2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)$ なので，

$$A = DB, \qquad D = \left(\delta_{ij} \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right)_{i,j \in I}, \qquad B = ((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j \in I}$$

と分解できるが，D は対角成分が $2/(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ の対角行列なので正則行列，また $E_{\mathbf{R}} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{R}\alpha_i$ 上の標準形式 $(\ ,\ )$ が正定値なので B も正則行列になる．したがって A も正則行列である．

(ii) $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ の線形独立性を示せばよいが，$\sum_j c_j \alpha_j = 0$ とすると，任意の $i \in I$ に対して $\sum_j a_{ij} c_j = \sum_j c_j \alpha_j(h_i) = 0$ となり，したがって $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が正則行列であることから $c_j = 0\,(j \in I)$ が従う．またこの場合には，$|I| = \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}^*$ から，$\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{K}\alpha_i$ も成り立っている．　∎

$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ をカルタン行列であって，そのすべての既約成分は有限型であるものとする．$\Phi=(\mathfrak{h},\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I})$ が，A をカルタン行列とする一般の基本ルート・データならば，

$$\mathfrak{h}_1=\bigoplus_{i\in I}\mathbf{K}h_i,\quad \mathfrak{z}=\{h\in\mathfrak{h}|\alpha_i(h)=0\ (i\in I)\}$$

とおくとき，$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{z}$ が成立する．実際，$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ の線形独立性から $\dim\mathfrak{z}=\dim\mathfrak{h}-|I|=\dim\mathfrak{h}-\dim\mathfrak{h}_1$ なので，$\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{z}=\{0\}$ を示せばよいが，これは $A=(\alpha_j(h_i))_{i,j\in I}$ が正則行列であることから明らか．このとき Φ_A を $(\mathfrak{h}_1,\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i|\mathfrak{h}_1\}_{i\in I})$ と同一視すると，カッツ・ムーディ・リー代数の定義から，直和分解

$$\mathfrak{g}(\Phi)=\mathfrak{z}\oplus\mathfrak{g}(\Phi_A) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで，$\mathfrak{g}(\Phi_A)$ は $\mathfrak{g}(\Phi)$ のイデアル，また $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}(\Phi)$ の可換なイデアルになっている．

さらに A の既約分解を

$$A=A^{(1)}\oplus\cdots\oplus A^{(r)},\qquad A^{(k)}=(a_{ij})_{i,j\in I^{(k)}}\qquad I=\bigsqcup_{k=1}^{r}I^{(k)}$$

とするとき，

$$\mathfrak{g}(\Phi_A)=\bigoplus_{k=1}^{r}\mathfrak{g}(\Phi_{A^{(k)}}) \tag{3.2}$$

が成り立つ（各 $\mathfrak{g}(\Phi_{A^{(k)}})$ は $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ のイデアル）．

以上により，有限次元カッツ・ムーディ・リー代数のうちで，有限型カルタン行列 A に対する $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ が基本的であることがわかった．

3.6［定義］　非可換リー代数 $\mathfrak{g}\neq\{0\}$ であって，そのイデアルは自明なもの（$\mathfrak{g}$ および $\{0\}$）のみであるようなものを，**単純リー代数**（simple Lie algebra）と呼ぶ．

3.7［定理］　A が有限型カルタン行列ならば $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ は有限次元単純リー代数である．

証明　$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(\Phi_A)$ とおく．$\mathfrak{a}\neq\{0\}$ をそのイデアルとすると，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_A)$ なので，$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}\neq\{0\}$ である．$h\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{h}\setminus\{0\}$ とする．任意の $i\in I$ に対して

$\alpha_i(h)=0$ とすると，$\mathfrak{h}^*=\sum_{i\in I}\mathbf{K}\alpha_i$ より $h=0$ となってしまい矛盾．したがって $\alpha_i(h)\neq 0$ となる $i\in I$ が存在する．このとき

$$e_i=[h,(\alpha_i(h))^{-1}e_i]\in\mathfrak{a},\quad f_i=[h,-(\alpha_i(h))^{-1}f_i]\in\mathfrak{a},\quad h_i=[e_i,f_i]\in\mathfrak{a}$$

である．また $e_i,f_i,h_i\in\mathfrak{a}$ で $a_{ij}\neq 0$ とすると，

$$e_j=[h_i,a_{ij}^{-1}e_j]\in\mathfrak{a},\qquad f_j=[h_i,-a_{ij}^{-1}f_j]\in\mathfrak{a},\qquad h_j=[e_j,f_j]\in\mathfrak{a}$$

が成立する．A は既約なカルタン行列なので，そのディンキン図形は連結である．したがって，上に述べたことから，任意の $i\in I$ に対して $e_i,f_i,h_i\in\mathfrak{a}$ が成立する．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のリー代数としての生成元を含むので，$\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ でなければならない．∎

したがって，次の写像が得られた．

$$\{\,\text{有限型カルタン行列}\,\}\to\{\,\text{有限次元単純リー代数の同型類}\,\}\tag{3.3}$$

ただし，ディンキン図形が一致するカルタン行列は同じものと見なす（すなわち添え字集合 I の順序の入れ替えは無視する）．

実は次の事実が成立する．

3.8 [定理*]　基礎体 $\mathbf{K}$ が（標数 0 の）代数閉体ならば，写像 (3.3) は全単射である[2]．

本書ではこの定理の証明は与えない．

最後に有限型カルタン行列の分類を述べて，この節を終わることにしよう．カルタン行列を書き下す代わりに，対応するディンキン図形を与えることにする．なお $1\leqq a_{ij}a_{ji}\leqq 4$ のときには，ディンキン図形において，図 3.1 の置き換えを行う．すなわち，頂点 $\overset{i}{\circ}$ と頂点 $\overset{j}{\circ}$ を $a_{ij}a_{ji}$ 本の線分で結び，さらに $-a_{ji}>-a_{ij}$ ならば，辺上に i から j に向かう矢印を記す．

3.9 [定理]　対称化可能カルタン行列 A が有限型であるための必要十分条件は，そのディンキン図形が図 3.2 のいずれかの図形と一致することである．

---

[2] 全射性はむろん，単射性も明らかではないことに注意せよ．

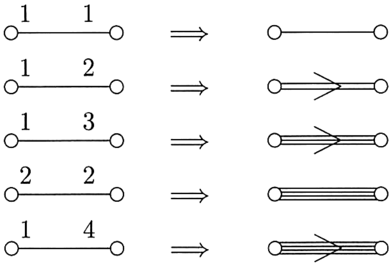


図 3.1　ディンキン図形の簡易表示

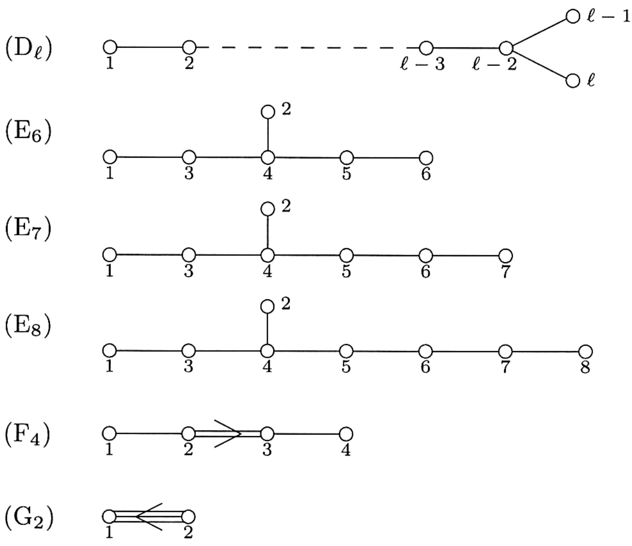


図 3.2　有限型カルタン行列のディンキン図形

証明は付録 A の第 1 節で述べる．

なお，図 3.2 の (X_ℓ) 型ディンキン図形に対応するカルタン行列 A を (X_ℓ) 型カルタン行列と呼び，対応するカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ を (X_ℓ) 型単純リー代数と呼ぶ．また添え字集合 I は，図 3.2 のディンキン図形の頂点の番号づけを用いて，$\{1,\ldots,\ell\}$ と同一視する．

A を有限型カルタン行列とする．対応するリー代数において $\Delta = \Delta_{\mathrm{re}}$ なので，任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha,\alpha) = (\alpha_i,\alpha_i)$ となる $i \in I$ が存在する．$i,j \in I$ に対応するディンキン図形の頂点が 1 重線で結ばれているならば $(\alpha_i,\alpha_i) = (\alpha_j,\alpha_j)$ であり，また 2 重線あるいは 3 重線で結ばれており矢印が i から j に向かっているときは $(\alpha_i,\alpha_i) > (\alpha_j,\alpha_j)$ が成り立つ．したがって図 3.2 から，$(\mathrm{A}_\ell), (\mathrm{D}_\ell), (\mathrm{E}_6), (\mathrm{E}_7), (\mathrm{E}_8)$ の場合は $\alpha \in \Delta$ に対する (α,α) はすべて一致し，残りの $(\mathrm{B}_\ell), (\mathrm{C}_\ell), (\mathrm{F}_4), (\mathrm{G}_2)$ の場合 には，$\alpha \in \Delta$ に対する (α,α) は大小 2 つの正の有理数値をとる．(α,α) が 2 つの値をとる場合には，(α,α) が大きいほうの値をとる場合に α を**長ルート**（long root）と呼び，(α,α) が小さいほうの値をとる場合に α を**短ルート**（short root）と呼ぶ．また長ルートの集合を Δ_{long} で表し，短ルートの集合を Δ_{short} で表す．(α,α) の値がすべて等しいときは，$\Delta = \Delta_{\mathrm{long}} = \Delta_{\mathrm{short}}$ とする．

3.10［補題］　A を有限型カルタン行列とするとき，対応するルートの集合 Δ において，Δ_{long} および Δ_{short} はそれぞれ 1 つの W 軌道からなる．

証明　上の議論により，i と j が 1 重線で結ばれているときに，α_i と α_j が同じ W 軌道に含まれることを示せばよい．$a_{ij} = a_{ji} = -1$ なので $s_j(\alpha_i) = \alpha_i + \alpha_j = s_i(\alpha_j)$ が成り立つ．∎

2．古典型単純リー代数

定理 3.7 と定理 3.9 により，図 3.2 に現れるディンキン図形 $(\mathrm{A}_\ell),\ldots,(\mathrm{G}_2)$ のおのおのに対応して，標数 0 の体上の有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi_A)$ が定まる（さらに定理*3.8 によれば，基礎体 $\mathbf{K}$ が代数閉体ならば，有限次元単純リー代数はこれらで尽きる）．

図 3.2 のディンキン図形は 4 つの無限系列 $(\mathrm{A}_\ell),\ldots,(\mathrm{D}_\ell)$ を含むが，これら

に対応する単純リー代数は**古典型単純リー代数**（classical simple Lie algebra）と呼ばれて，行列を用いて比較的容易に記述される．また，残りの 5 つのディンキン図形 $(\mathrm{E}_6),\ldots,(\mathrm{G}_2)$ に対応する単純リー代数は，**例外型単純リー代数**（exceptional simple Lie algebra）と呼ばれている．例外型単純リー代数についても，ケーリー代数やジョルダン代数を用いた記述が知られている[3]．

本節の目標は古典型単純リー代数の具体的な記述を与えることであるが，その前に，対応するート系 Δ およびワイル群 W がどうなるかを先に見ておくことにする．以下 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{\ell}$ を (X_ℓ) 型カルタン行列とし（添え字集合の番号づけは図 3.2 に従う），対応する基本ルート・データを $\Phi_A=(\mathfrak{h},\{h_i\}_{i=1}^{\ell},\{\alpha_i\}_{i=1}^{\ell})$ とする．このときルート系 $\Delta\subset\mathfrak{h}^*$ およびワイル群 $W\subset GL(\mathfrak{h}^*)$ が具体的にどうなるかを，X が $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}$ の場合に考える．

(A_ℓ) 型のルート系とワイル群

A が (A_ℓ) 型カルタン行列の場合を考える．$\{e_i\}_{i=1}^{\ell+1}$ を基底とするベクトル空間 V において，V の元の族 $\{e_i-e_{i+1}\}_{i=1}^{\ell}$ は，V の部分空間 $V'=\{\sum_{i=1}^{\ell+1}c_ie_i|\sum_{i=1}^{\ell+1}c_i=0\}$ の基底となるので，線形同型写像

$$\mathfrak{h}^*=\sum_{i=1}^{\ell}\mathbf{K}\alpha_i\to V'\qquad(\alpha_i\mapsto e_i-e_{i+1})$$

が定まる．これにより $\mathfrak{h}^*$ と V' を同一視する．すなわち

$$\mathfrak{h}^*=\left\{\sum_{i=1}^{\ell+1}c_ie_i\in V\,\middle|\,\sum_{i=1}^{\ell+1}c_i=0\right\},\qquad\alpha_i=e_i-e_{i+1}\tag{3.4}$$

とする．このとき次が成立する．

3.11［命題］

(i) 対称群 $S_{\ell+1}$ から $GL(V)$ への群の準同型写像 $S_{\ell+1}\to GL(V)$ $(\sigma\mapsto w_\sigma)$ が，

$$w_\sigma(\sum_{i=1}^{\ell+1}c_ie_i)=\sum_{i=1}^{\ell+1}c_ie_{\sigma(i)}$$

---

[3] 5 個の例外型単純リー代数は，それぞれが個性的でしかも魅惑的な対象であり，うまく手なずけるには職人芸を必要とする（らしい）．筆者は，残念ながらまだこちらの世界に本格的にはまったことはない．

により定まる．w_σ は $\mathfrak{h}^*$ を保ち，これにより群の準同型写像 $S_{\ell+1} \to GL(\mathfrak{h}^*)$ が定まるが，これは同型 $S_{\ell+1} \cong W$ を導く．

(ii) $\Delta = \{e_i - e_j | 1 \leqq i, j \leqq \ell+1, i \neq j\}$.

証明 (i) 主張のうちで，群の準同型写像 $S_{\ell+1} \to GL(\mathfrak{h}^*)$ が定まるところまでは明らかなので，これが同型 $S_{\ell+1} \cong W$ を導くことを示す．

V の双対空間 V^* における $\{e_i\}_{i=1}^{\ell+1}$ の双対基底を $\{e_i^*\}_{i=1}^{\ell+1}$ とすると，自然に線形写像

$$V^* \to (V')^* = \mathfrak{h}^{**} \cong \mathfrak{h}$$

が定まるが，このとき $e_i^* - e_{i+1}^* \in V^*$ の $\mathfrak{h}$ における像は h_i と一致していることが，$(e_i^* - e_{i+1}^*)(e_j - e_{j+1}) = a_{ij}$ からわかる．したがって，

$$\begin{aligned} s_i(\sum_{j=1}^{\ell+1} c_j e_j) &= \sum_{j=1}^{\ell+1} c_j e_j - (e_i^* - e_{i+1}^*)(\sum_{j=1}^{\ell+1} c_j e_j)(e_i - e_{i+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell+1} c_j e_j - (c_i - c_{i+1})(e_i - e_{i+1}) \\ &= \sum_{j \neq i, i+1} c_j e_j + c_{i+1} e_i + c_i e_{i+1} \end{aligned}$$

により，$s_i = w_{(i,i+1)}|\mathfrak{h}^*$ がわかる．対称群 $S_{\ell+1}$ が隣接互換の全体 $\{(i, i+1) | 1 \leqq i \leqq \ell\}$ により生成されることはよく知られているので，$S_{\ell+1} \to W \quad (\sigma \mapsto w_\sigma|\mathfrak{h}^*)$ は群の全射準同型写像である．いま $\sigma \in S_{\ell+1}$ に対して $w_\sigma|\mathfrak{h}^* = \mathrm{id}$ が成立しているとする．$v = \sum_{i=1}^{\ell+1} e_i$ とおくと，$V = \mathbf{K}v \oplus \mathfrak{h}^*$ であるが，$w_\sigma(v) = v$ なので，$w_\sigma = \mathrm{id}$ である．このとき $\sigma = 1$ となることは w_σ の定義から明らか．よって $\sigma \mapsto w_\sigma|\mathfrak{h}^*$ の単射性も示された．

(ii) (i) と $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\ell} W(\alpha_i)$ から容易に示される．∎

(B_ℓ) 型のルート系とワイル群

A が (B_ℓ) 型カルタン行列の場合を考える．$\{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ を基底とするベクトル空間 V において，V の元の族 $\{e_i - e_{i+1}\}_{i=1}^{\ell-1} \cup \{e_\ell\}$ は，V の基底となるので，

線形同型写像

$$\mathfrak{h}^* = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{K}\alpha_i \to V, \qquad \alpha_i \mapsto \begin{cases} e_i - e_{i+1} & (1 \leqq i \leqq \ell - 1) \\ e_\ell & (i = \ell) \end{cases}$$

が定まる．これにより $\mathfrak{h}^*$ と V を同一視する．すなわち

$$\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbf{K}e_i, \qquad \alpha_i = \begin{cases} e_i - e_{i+1} & (1 \leqq i \leqq \ell - 1) \\ e_\ell & (i = \ell) \end{cases}$$

とする．

対称群 S_ℓ は，単射準同型写像

$$S_\ell \to GL(\mathfrak{h}^*) \quad (\sigma \mapsto w_\sigma), \qquad w_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

により，$GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群と思える．また位数 2 の群 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ の ℓ 個の直積 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ は，単射準同型写像

$$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell \to GL(\mathfrak{h}^*), \qquad (m_1, \ldots, m_\ell) \mapsto \mathrm{diag}((-1)^{m_1}, \ldots, (-1)^{m_\ell})$$

により，$GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群と思える．ここで，$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_\ell)$ は対角成分が $a_1, \ldots, a_\ell$ で与えられる対角行列である．$S_\ell, (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ を $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群と思うとき，$S_\ell \cap (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell = \{1\}$ である．また $\sigma \in S_\ell, (m_1, \ldots, m_\ell) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ に対して

$$w_\sigma \mathrm{diag}((-1)^{m_1}, \ldots, (-1)^{m_\ell}) w_\sigma^{-1} = \mathrm{diag}((-1)^{m_{\sigma^{-1}(1)}}, \ldots, (-1)^{m_{\sigma^{-1}(\ell)}})$$

が成り立っている．したがって，半直積 $S_\ell \cdot (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ が $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群となっている．$\mathfrak{h}^*$ の基底 $\{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ により $GL(\mathfrak{h}^*)$ を $GL_\ell(\mathbf{K})$ と同一視するとき，この群 $S_\ell \cdot (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ は，各行各列に 0 でない成分をちょうど 1 つ含み，しかもそれは ± 1 のいずれかであるような行列の全体からなる．

このとき次が成立する．

3.12 [命題]

(i) $W = S_\ell \cdot (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$.

(ii) $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leqq i < j \leqq \ell\} \cup \{\pm e_i | 1 \leqq i \leqq \ell\}$.

証明 (i)$\mathfrak{h}^*$ の双対空間 $\mathfrak{h}$ における $\{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ の双対基底を $\{e_i^*\}_{i=1}^{\ell}$ とするとき，$h_i = e_i^* - e_{i+1}^*$ $(1 \leqq i \leqq \ell - 1)$, $h_\ell = 2e_\ell^*$ である（実際 $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ が容易に確かめられる）．そこで s_i を定義に従って計算すると，$s_i = w_{(i,i+1)}$ $(1 \leqq i \leqq \ell - 1), s_\ell = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$ となる．W は $s_1, \ldots, s_\ell$ により生成される $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群なので，$W = S_\ell \cdot (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ が容易にわかる．

(ii) (i) と $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\ell} W(\alpha_i)$ から容易に示される． ∎

(C_ℓ) 型のルート系とワイル群

A が (C_ℓ) 型カルタン行列の場合を考える．(B_ℓ) 型のときとほとんど同じなので簡単に済ます．(B_ℓ) 型のときと同様に

$$\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbf{K} e_i, \qquad \alpha_i = \begin{cases} e_i - e_{i+1} & (1 \leqq i \leqq \ell - 1) \\ 2e_\ell & (i = \ell) \end{cases}$$

とする（(B_ℓ) 型のときとの違いは α_ℓ が e_ℓ でなく $2e_\ell$ になっていることである）．(B_ℓ) 型のときと全く同じ群 $S_\ell \cdot (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ が $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群となっており，これは $\mathfrak{h}^*$ の基底 $\{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ により $GL(\mathfrak{h}^*)$ を $GL_\ell(\mathbf{K})$ と同一視すると，各行各列に 0 でない成分をちょうど 1 つ含み，しかもそれは ± 1 のいずれかであるような行列の全体からなる．

(B_ℓ) 型のときと全く同様に次が成立する．

3.13 ［命題］

(i) $W = S_\ell \cdot (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$.

(ii) $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leqq i < j \leqq \ell\} \cup \{\pm 2e_i | 1 \leqq i \leqq \ell\}$.

(D_ℓ) 型のルート系とワイル群

A が (D_ℓ) 型カルタン行列の場合を考える．(B_ℓ) 型，(C_ℓ) 型の場合と同様に

$$\mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbf{K} e_i, \qquad \alpha_i = \begin{cases} e_i - e_{i+1} & (1 \leqq i \leqq \ell - 1) \\ e_{\ell-1} + e_\ell & (i = \ell) \end{cases}$$

とする．

(B_ℓ) 型，(C_ℓ) 型のときには $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell$ を考えたが，今度はその部分群

$$H = \{(m_1, \ldots, m_\ell) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^\ell | \sum_{i=1}^{\ell} m_i = 0\}$$

を考える．H は $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\ell-1}$ と同型な群である（ただし自然な同型 $H \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\ell-1}$ があるわけではない）．この場合にも半直積 $S_\ell \cdot H$ が $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群となっている．また，$\mathfrak{h}^*$ の基底 $\{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ により $GL(\mathfrak{h}^*)$ を $GL_\ell(\mathbf{K})$ と同一視するとき，$S_\ell \cdot H$ は，各行各列に 0 でない成分をちょうど 1 つ含み，しかもそれは ± 1 のいずれかであるような行列のうちで，さらに成分 -1 の総数が偶数であるようなものの全体からなる．

このとき次が成立する．

3.14 ［命題］

(i) $W = S_\ell \cdot H$.

(ii) $\Delta = \{\pm e_i \pm e_j | 1 \leqq i < j \leqq \ell\}$.

証明　(i) $\mathfrak{h}^*$ の双対空間 $\mathfrak{h}$ における $\{e_i\}_{i=1}^{\ell}$ の双対基底を $\{e_i^*\}_{i=1}^{\ell}$ とするとき，$h_i = e_i^* - e_{i+1}^*$ $(1 \leqq i \leqq \ell - 1)$, $h_\ell = e_{\ell-1}^* + e_\ell^*$ である．そこで s_i を定義に従って計算すると，$s_i = w_{(i,i+1)}$ $(1 \leqq i \leqq \ell - 1), s_\ell = w_{(\ell-1,\ell)} \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1, -1)$ となる．W は $s_1, \ldots, s_\ell$ により生成される $GL(\mathfrak{h}^*)$ の部分群なので，$W = S_\ell \cdot H$ が容易にわかる．

(ii) (i) と $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\ell} W(\alpha_i)$ から容易に示される．　∎

次に $(\mathrm{A}_\ell), \ldots, (\mathrm{D}_\ell)$ に対応するカッツ・ムーディ・リー代数の具体的記述を与える．

特殊線形リー代数

V を $\mathbf{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V の線形変換の全体のなす結合代数 $\mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ をリー代数と思うときには，$\mathfrak{gl}(V)$ と書くのであった．$f \in \mathfrak{gl}(V)$ であってそのトレース[4] $\mathrm{Tr}(f)$ が 0 になるものの全体 $\mathfrak{sl}(V)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数になる．実際，$\mathfrak{sl}(V)$ が $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間になることは明らか．また $f, g \in \mathfrak{sl}(V)$ のとき，

$$\mathrm{Tr}([f,g]) = \mathrm{Tr}(fg) - \mathrm{Tr}(gf) = 0$$

により，$[f,g] \in \mathfrak{sl}(V)$ である．$\mathfrak{sl}(V)$ を**特殊線形リー代数**（special linear Lie algebra）と呼ぶ[5]．V の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を用いて，$\mathfrak{gl}(V)$ を n 次正方行列の全体 $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ と同一視すれば，$\mathfrak{sl}(V)$ に対応するのは，$\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ の部分リー代数

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbf{K}) = \{C \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{K}) \mid \mathrm{Tr}(C) = 0\} \tag{3.5}$$

である．(i,j) 成分が 1 で他の成分はすべて 0 となる行列を E_{ij} で表すことにすると，

$$\{E_{ij} | 1 \leqq i,j \leqq n, i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{i+1,i+1} | 1 \leqq i \leqq n-1\}$$

が $\mathfrak{sl}_n(\mathbf{K})$ の基底となるので，$\dim \mathfrak{sl}(V) = n^2 - 1$ である．

3.15［命題］　A を (A_ℓ) 型カルタン行列とするとき，リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ は $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ と同型である．

証明　$i = 1, \ldots, \ell$ に対して $H_i, E_i, F_i \in \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ を

$$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \qquad E_i = E_{i,i+1}, \qquad F_i = E_{i+1,i}$$

により定める．このとき，リー代数の準同型写像 $F : \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_A) \to \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ が

$$F(h_i) = H_i, \qquad F(e_i) = E_i, \qquad F(f_i) = F_i$$

[4] 線形変換のトレースに不慣れな人は次節を参照されよ．

[5] あまり感じのいいネーミングではないが，対応するリー群のほうの言葉遣いで，$GL(V)$ を一般線形群，$SL(V)$ を特殊線形群と呼ぶことから来ている．

により矛盾なく定まることが，関係式

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_j] = a_{ij}E_j, \quad [H_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij}H_j$$

を示すことにより確かめられる（これは行列の計算問題なのでここでは省略する）．このとき F は全射である．実際，$\{H_i, E_i, F_i\}_{i=1}^{\ell}$ により生成される $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ の部分リー代数 $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ と一致していることを示せばよい．$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ は，

$$\{H_i | 1 \leqq i \leqq \ell\} \cup \{E_{ij}, E_{ji} | 1 \leqq i < j \leqq \ell + 1\}$$

を基底としているので，$\{E_{ij}, E_{ji} | 1 \leqq i < j \leqq \ell + 1\} \subset \mathfrak{a}$ を示せばよいが，これは関係式

$$[E_{ij}, E_j] = E_{i,j+1}, [F_j, E_{ji},] = E_{j+1,i} \qquad (1 \leqq i < j \leqq \ell)$$

と $j - i$ に関する帰納法を用いて容易に示される．

そこで $\mathfrak{r} = \mathrm{Ker}(F)$ とおくと，リー代数の準同型定理により，$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K}) \cong \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_A)/\mathfrak{r}$ である．F の $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{K}h_i$ への制限は単射なので，$\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ が成立する．したがって $\mathfrak{g}(\Phi_A) = \mathfrak{g}_{\min}(\Phi_A)$ の定義により，リー代数の全射準同型写像 $\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_A)/\mathfrak{r} \to \mathfrak{g}(\Phi_A)$ が存在する．$\dim \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_A)/\mathfrak{r} = \dim \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K}) = (\ell+1)^2 - 1$ であるが，一方定理 3.3 と命題 3.11 により $\dim \mathfrak{g}(\Phi_A) = \ell + (\ell+1)\ell = (\ell+1)^2 - 1$．したがって，$\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K}) \cong \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_A)/\mathfrak{r} \cong \mathfrak{g}(\Phi_A)$ が示された．∎

直交リー代数

$\mathbf{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V と，V 上の双線形形式 $\varphi : V \times V \to \mathbf{K}$ に対して $\mathfrak{gl}(V)$ の部分リー代数 $\mathfrak{g}(V, \varphi)$ が，

$$\mathfrak{g}(V, \varphi) = \{f \in \mathfrak{gl}(V) | \varphi(f(v_1), v_2) + \varphi(v_1, f(v_2)) = 0 \ (v_1, v_2 \in V)\ \} \tag{3.6}$$

により定まる．実際，$\mathfrak{g}(V, \varphi)$ が $\mathfrak{gl}(V)$ の部分空間になっていることは明らか．また $f, g \in \mathfrak{g}(V, \varphi)$ とするとき，

$$\begin{aligned}
\varphi([f, g](v_1), v_2) &= \varphi(fg(v_1), v_2) - \varphi(gf(v_1), v_2) \\
&= \varphi(v_1, gf(v_2)) - \varphi(v_1, fg(v_2)) \\
&= -\varphi(v_1, [f, g](v_2))
\end{aligned}$$

により，$[f,g]\in\mathfrak{g}(V,\varphi)$ がわかる．

V の基底 $\{v_1,\ldots,v_n\}$ をとって，正方行列 L を $L=(\varphi(v_i,v_j))_{i,j=1}^n$ により定めるとき

$$\varphi(\sum_{i=1}^n x_iv_i,\sum_{j=1}^n y_jv_j)={}^txLy$$

となる．ここで x,y は ${}^tx=(x_1,\ldots,x_n),{}^ty=(y_1,\ldots,y_n)$ により定まる列ベクトルである．また逆に，n 次正方行列 L に対して，φ を上の式で定めれば，φ は V 上の双線形形式になる．この L を，φ の（基底 $\{v_1,\ldots,v_n\}$ に関する）表現行列と呼ぶ．容易にわかるように，双線形形式が非退化であるための必要十分条件は，その表現行列が正則行列となることである．なお V の別の基底 $\{w_1,\ldots,w_n\}$ に関する φ の表現行列 M は，基底の取り替え行列

$$P=(p_{ij})_{i,j=1}^n,\qquad w_j=\sum_{i=1}^n p_{ij}v_i$$

を用いて，$M={}^tPLP$ と書ける．

基底 $\{v_1,\ldots,v_n\}$ により $\mathfrak{gl}(V)$ を $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ と同一視するとき，$\mathfrak{g}(V,\varphi)$ に対応する $\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ の部分リー代数は，

$$\mathfrak{g}(L)=\{C\in\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})|{}^tCL+LC=0\}$$

により与えられる．

以下 φ が V 上の非退化対称双線形形式である場合を考える．このとき，リー代数 $\mathfrak{g}(V,\varphi)$ を非退化対称双線形形式 φ に関する**直交リー代数**（orthogonal Lie algebra）と呼ぶ．基礎体 $\mathbf{K}$ が代数閉体ならば，V の基底をうまくとるとき，V 上の非退化対称双線形形式 φ の表現行列は単位行列となることが知られている．この意味で，代数閉体上の有限次元ベクトル空間上の非退化対称双線形形式は本質的に 1 つしかない．しかし一般の体上では，非退化対称双線形形式は 1 つとは限らず，したがって φ の取り方により，対応する直交リー代数もたくさんある．例えば $\mathbf{K}$ が実数体 $\mathbf{R}$ の場合には，n 次元のベクトル空間上の対称双線形形式の表現行列は，基底をうまくとることにより

$$L_{pq}=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{p\text{ 個}},\underbrace{-1,\ldots,-1}_{q\text{ 個}},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-p-q\text{ 個}})$$

の形にできるが，符号数 (p,q) が異なる2つの対称双線形形式は，基底を取り替えても同じ表現行列を持たないという意味で，本質的に相異なる．

我々は一般の標数0の体上で考えているので，φ を決めないと話が進まない．まず，$\dim V = 2\ell + 1$ で φ の表現行列が，

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_\ell \\ 0 & E_\ell & 0 \end{pmatrix} \qquad (E_\ell \text{ は } \ell \text{ 次単位行列}) \tag{3.7}$$

により与えられる場合を考える．

3.16 [注意]　基底の取り方により表現行列 L は変わるので，同じ φ を用いるにしても 行列としての L の表示法は他にもあり得る．上の表示は岩堀 [13] に従った．ブルバキ [3] では，

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いている．ただし，これと (3.7) は，基底の並べ方が違うだけである．どの L で考えるのが見やすいかは，扱う問題によるので一概にはいえない．例えば $\mathbf{K}$ が代数閉体の場合には，$L = E_{2\ell+1}$ としても同じはずで，このほうが簡単に見えるかもしれないが，これだと $\mathfrak{g}(L)$ をカッツ・ムーディ・リー代数として表示するとき，カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ の元が対角行列にならないということが起こって感じが悪い（ただしそれも扱う問題によるということはある）．

このとき

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(L) &= \{C \in \mathfrak{gl}_{2\ell+1}(\mathbf{K}) | {}^tCL + LC = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -{}^tx & -{}^ty \\ y & X & Y \\ x & Z & -{}^tX \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} x, y \in \mathbf{K}^\ell, X, Y, Z \in M_\ell(\mathbf{K}), \\ {}^tY = -Y, {}^tZ = -Z \end{array} \right\} \end{aligned}$$

となる．特に

$$\dim \mathfrak{g}(L) = \ell + \ell + \ell^2 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} = 2\ell^2 + \ell$$

である．

3.17 ［**注意**］　$\mathfrak{g}(L)$ の次元を計算するだけなら次のように考えてもよい（このほうが忘れたときに復元しやすい）．$\dim \mathfrak{g}(L)$ は線形方程式 ${}^tCL + LC = 0$ の解空間の次元であるが，線形方程式の解空間の次元は係数体を拡大しても変わらないので，$\mathbf{K}$ は代数閉体であるとしてよい．このとき，基底を取り直すと $L = E_{2\ell+1}$ としてもよい．すなわち ${}^tC = -C$ を満たす $2\ell+1$ 次行列 C の全体のなす空間の次元を求めればよい．$\{E_{ij} - E_{ji} | 1 \leqq i < j \leqq 2\ell+1\}$ がこの空間の基底となるので，

$$\dim \mathfrak{g}(L) = \binom{2\ell+1}{2} = (2\ell+1)\ell$$

である．

3.18 ［**命題**］　A を (B_ℓ) 型カルタン行列とするとき，リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ は (3.7) の L に対する $\mathfrak{g}(L)$ と同型である．

証明　$i = 1, \ldots, \ell-1$ に対して $H_i, E_i, F_i \in \mathfrak{g}(L)$ を

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_i \end{pmatrix} \qquad (\Lambda_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \in M_\ell(\mathbf{Z})),$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{i,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{i+1,i} \end{pmatrix}, \qquad F_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{i+1,i} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{i,i+1} \end{pmatrix}$$

により定める．また

$$H_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2E_{\ell\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -2E_{\ell\ell} \end{pmatrix},$$

$$E_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2{}^t\mathbf{e}_\ell \\ 2\mathbf{e}_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_\ell = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathbf{e}_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{e}_\ell & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする ($\mathbf{e}_\ell = {}^t(0,\ldots,0,1) \in \mathbf{K}^\ell$). このとき，リー代数の同型写像 $F : \mathfrak{g}(\Phi_A) \to \mathfrak{g}(L)$ が

$$F(h_i) = H_i, \qquad F(e_i) = E_i, \qquad F(f_i) = F_i$$

により定まることが，命題 3.15 と同様に示される　∎

今度は，$\dim V = 2\ell$ で φ の表現行列が，

$$L = \begin{pmatrix} 0 & E_\ell \\ E_\ell & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

により与えられる場合を考える．

このとき

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(L) &= \{C \in \mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbf{K}) | {}^tCL + LC = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -{}^tX \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} X, Y, Z \in M_\ell(\mathbf{K}), \\ {}^tY = -Y, {}^tZ = -Z \end{array} \right\}\end{aligned}$$

となる．特に

$$\dim \mathfrak{g}(L) = \ell^2 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} = 2\ell^2 - \ell$$

である．

3.19 [命題]　A を (D_ℓ) 型カルタン行列とするとき，リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ は (3.8) の L に対する $\mathfrak{g}(L)$ と同型である．

証明　$i = 1, \ldots, \ell-1$ に対して $H_i, E_i, F_i \in \mathfrak{g}(L)$ を

$$H_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & -\Lambda_i \end{pmatrix} \qquad (\Lambda_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \in M_\ell(\mathbf{Z})),$$

$$E_i = \begin{pmatrix} E_{i,i+1} & 0 \\ 0 & -E_{i+1,i} \end{pmatrix}, \ F_i = \begin{pmatrix} E_{i+1,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,i+1} \end{pmatrix}$$

により定める．また

$$H_\ell = \begin{pmatrix} \Upsilon & 0 \\ 0 & -\Upsilon \end{pmatrix} \qquad (\Upsilon = E_{\ell-1,\ell-1} + E_{\ell\ell}),$$

$$E_\ell = \begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Xi & 0 \end{pmatrix} \qquad (\Xi = E_{\ell-1,\ell} - E_{\ell,\ell-1})$$

とする．このとき，リー代数の同型写像 $F : \mathfrak{g}(\Phi_A) \to \mathfrak{g}(L)$ が

$$F(h_i) = H_i, \qquad F(e_i) = E_i, \qquad F(f_i) = F_i$$

により定まることが，命題 3.15 と同様に示される ∎

シンプレクティック・リー代数

直交リー代数の場合には非退化対称双線形形式を考えたが，今度は非退化反対称双線形形式，すなわち非退化な双線形形式 $\varphi : V \times V \to \mathbf{K}$ であって，

$$\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1) \qquad (v_1, v_2 \in V)$$

を満たすものを考える．このとき $\mathfrak{g}(V, \varphi)$ を**シンプレクティック・リー代数** (symplectic Lie algebra) と呼ぶ．φ に関する条件は，その表現行列 L が行列式が 0 でない反対称行列であるということと同じことである．よく知られているように，有限次元ベクトル空間 V 上に非退化な反対称双線形形式が存在するための必要十分条件は，V の次元が偶数であることである．また，2ℓ 次元ベクトル空間 V 上に非退化な反対称双線形形式 φ が与えられているとき，V の基底をうまく選んで，φ の表現行列は

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E_\ell \\ -E_\ell & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

の形にすることができる．したがって，対称双線形形式の場合と異なり，非退化反対称双線形形式は，基礎体の選び方によらずに，本質的に 1 つしか存在しない．そこで以下，リー代数

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(J) &= \{C \in \mathfrak{gl}_{2\ell}(\mathbf{K}) | {}^tCJ + JC = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -{}^tX \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} X, Y, Z \in M_\ell(\mathbf{K}), \\ {}^tY = Y, {}^tZ = Z \end{array} \right\} \end{aligned}$$

について考える．この場合

$$\dim \mathfrak{g}(J) = \ell^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2} = 2\ell^2 + \ell$$

である．

3.20 [命題]　A を (C_ℓ) 型カルタン行列とするとき，リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_A)$ は $\mathfrak{g}(J)$ と同型である．

証明　$i = 1, \ldots, \ell - 1$ に対して $H_i, E_i, F_i \in \mathfrak{g}(L)$ を

$$H_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & 0 \\ 0 & -\Lambda_i \end{pmatrix} \qquad (\Lambda_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \in M_\ell(\mathbf{Z})),$$

$$E_i = \begin{pmatrix} E_{i,i+1} & 0 \\ 0 & -E_{i+1,i} \end{pmatrix}, \ F_i = \begin{pmatrix} E_{i+1,i} & 0 \\ 0 & -E_{i,i+1} \end{pmatrix}$$

により定める．また

$$H_\ell = \begin{pmatrix} E_{\ell\ell} & 0 \\ 0 & -E_{\ell\ell} \end{pmatrix}, \qquad E_\ell = \begin{pmatrix} 0 & E_{\ell\ell} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{\ell\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，リー代数の同型写像 $F : \mathfrak{g}(\Phi_A) \to \mathfrak{g}(J)$ が

$$F(h_i) = H_i, \qquad F(e_i) = E_i, \qquad F(f_i) = F_i$$

により定まることが，命題 3.15 と同様に示される．　■

3. キリング形式とカシミール元

まず行列の**トレース** (trace) に関して簡単に復習しておこう．一般に正方行列 $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して，その対角成分の和を C のトレースと呼び，$\mathrm{Tr}(C)$ で表す．すなわち

$$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$$

とおく．これに関して次が成立する．

3.21［補題］　C, D を n 次正方行列とするとき，$\mathrm{Tr}(CD) = \mathrm{Tr}(DC)$ が成り立つ．

証明　$C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}, D = (d_{ij})_{i,j=1}^{n}$ とするとき，

$$\mathrm{Tr}(CD) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}d_{ji}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}d_{ji}$$

となるので，$\mathrm{Tr}(CD)$ は c_{ij} と d_{ij} に関して対称である．したがって明らか．■

f を有限次元ベクトル空間 V の線形変換とする．V の基底を 1 つ選び，f の行列表示 C に関して，C のトレース $\mathrm{Tr}(C)$ を考えると，これは基底の取り方にはよらない．実際，別の基底に関する f の行列表示は $P^{-1}CP$（P は正則行列）の形をしているが，補題 3.21 により

$$\mathrm{Tr}(P^{-1}CP) = \mathrm{Tr}((P^{-1}C)P) = \mathrm{Tr}(P(P^{-1}C)) = \mathrm{Tr}(C)$$

である．したがって有限次元ベクトル空間の線形変換 f のトレースが

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(C)\ （C \text{ は } f \text{ の表現行列}）$$

により定まる．

一般に $\mathfrak{a}$ を有限次元リー代数とするとき，

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) \qquad (x, y \in \mathfrak{a}) \tag{3.10}$$

により，$\mathfrak{a}$ 上の双線形形式 $\kappa_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ が定まるが，補題 3.21 により，これは対称であることがわかる．この対称双線形形式 $\kappa_{\mathfrak{a}}$ を $\mathfrak{a}$ の**キリング形式** (Killing form) と呼ぶ．

例 2.48 を随伴表現に適用して次を得る．

3.22［命題］　$\kappa_{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ 上の不変形式である．すなわち，任意の $x, y, z \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\kappa_{\mathfrak{a}}([z, x], y) + \kappa_{\mathfrak{a}}(x, [z, y]) = 0.$$

3.23［命題］　$\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{a}$ のイデアルとする．このとき，$\kappa_{\mathfrak{a}}$ の $\mathfrak{b}$ への制限 $\kappa_{\mathfrak{a}}|\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ は $\kappa_{\mathfrak{b}}$ と一致する．

証明　$\mathfrak{b}$ の基底 $\{x_i\}_{i=1}^r$ を延長して $\mathfrak{a}$ の基底 $\{x_i\}_{i=1}^n$ をとる $(n \geqq r)$．$y, z \in \mathfrak{b}$ とする．$\mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(z)(x_j) \in \mathfrak{b}$ なので，$\mathrm{ad}(y)\,\mathrm{ad}(z)(x_j) = \sum_i c_{ij} x_i$ とするとき，$i > r$ ならば $c_{ij} = 0$ である．したがって

$$\kappa_{\mathfrak{a}}(y, z) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{r} c_{ii} = \kappa_{\mathfrak{b}}(y, z).$$

■

3.24 [命題]　$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ が $\mathfrak{a}$ のイデアルで，$\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{a}_i$ が成り立っているとする．このとき，$i \neq j$ ならば $\kappa_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \{0\}$ が成り立つ．

証明　$x \in \mathfrak{a}_i, y \in \mathfrak{a}_j$ とする．$\mathrm{ad}(y)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}_j$，したがって $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$ となるので，$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y) = 0$ である．よって $\kappa_{\mathfrak{a}}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = 0$.　■

$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ が $\mathfrak{a}$ のイデアルで，$\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{a}_i$ が成り立っているとすると，命題 3.23 と命題 3.24 により，

$$\kappa_{\mathfrak{a}}\Big(\sum_{i=1}^{r} x_i, \sum_{i=1}^{r} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \kappa_{\mathfrak{a}_i}(x_i, y_i) \qquad (x_i, y_i \in \mathfrak{a}_i)$$

となる．

$\mathfrak{a}$ の部分空間 $\mathfrak{r}$ を

$$\mathfrak{r} = \{x \in \mathfrak{a} | \kappa_{\mathfrak{a}}(x, \mathfrak{a}) = \{0\}\}$$

により定める．このとき $\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{a}$ のイデアルである．実際，$a \in \mathfrak{a}, x \in \mathfrak{r}$ とすると，命題 3.22 により，任意の $y \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\kappa_{\mathfrak{a}}([a, x], y) = -\kappa_{\mathfrak{a}}(x, [a, y]) = 0$$

となるので，$[a, x] \in \mathfrak{r}$ がわかる．いま $\mathfrak{a}$ が単純リー代数であるとすると，そのイデアルは $\{0\}$ か $\mathfrak{a}$ のみなので，$\mathfrak{r} = \{0\}$ または $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}$ である．したがって次が示された．

3.25 [命題]　有限次元単純リー代数のキリング形式は，非退化であるか，あるいは恒等的に 0 であるかのいずれかである．

実は次が成り立つ.

3.26 [定理*] (カルタンの判定条件)　標数 0 の体上の有限次元リー代数が単純イデアルの直和になるための必要十分条件は，そのキリング形式が非退化であることである.

特に，標数 0 の体上の有限次元単純リー代数のキリング形式は非退化である[6]. この定理は，有限次元単純リー代数の分類理論の出発点となる重要な定理であるが，本書では証明は割愛する．ただし，カッツ・ムーディ・リー代数が有限次元単純リー代数になる場合には，そのキリング形式の非退化性を，もう少し後で直接示す.

3.27 [命題]　$\mathfrak{a}$ は単純イデアル $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ の直和であるとする．$\mathfrak{a}_i$ 上の不変形式 κ_i に関して，$\kappa : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ を

$$\kappa(\sum_i x_i, \sum_i y_i) = \sum_i \kappa_i(x_i, y_i) \qquad (x_i, y_i \in \mathfrak{a}_i) \tag{3.11}$$

で定めれば，κ は $\mathfrak{a}$ 上の不変形式である．逆に，κ が $\mathfrak{a}$ 上の不変形式とすると，$\mathfrak{a}_i$ 上の不変形式 κ_i に関して，(3.11) が成り立つ.

証明　前半は容易である．後半を示すには，$\mathfrak{a}$ 上の不変形式 κ があるとき，$i \neq j$ に対して $\kappa(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \{0\}$ が成り立つことをいえばよい．$\mathfrak{a}_i$ は単純リー代数なので，そのイデアル $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i]$ (例 1.14) は $\{0\}$ か $\mathfrak{a}_i$ に限るが，$\mathfrak{a}_i$ は非可換なので $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \neq \{0\}$，したがって $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] = \mathfrak{a}_i$ である．また $i \neq j$ のとき，$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] \subset \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$ により，$[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$ である．したがって

$$\kappa(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \kappa([\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i], \mathfrak{a}_j) = \kappa(\mathfrak{a}_i, [\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j]) = \kappa(\mathfrak{a}_i, 0) = \{0\}.$$

∎

3.28 [命題]　$\mathbf{K}$ は代数閉体であるとする．有限次元単純リー代数 $\mathfrak{a}$ 上の不変形式は，定数倍を除いて一意的である (したがって，定理*3.26 を認めれば，不変形式はキリング形式の定数倍に限る).

[6] 正標数の体上では，キリング形式が恒等的に 0 になるような有限次元単純リー代数も存在し，その分類はもっと複雑になる.

証明　$\kappa : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ を0でない不変形式とする．線形写像 $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$ を $(f(x))(y) = \kappa(x, y)$ で定める．仮定により，f は $U(\mathfrak{a})$ 加群の準同型写像で，しかも0ではない．$\mathfrak{a}$ は単純リー代数なので，$U(\mathfrak{a})$ 加群としては既約である．したがってその双対加群 $\mathfrak{a}^*$ も既約な $U(\mathfrak{a})$ 加群である．既約 $U(\mathfrak{a})$ 加群の間の自明でない準同型写像 $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$ が存在するので，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{a}^*$ は $U(\mathfrak{a})$ 加群として同型である（命題1.47(i)）．したがってシューアの補題（命題1.47(ii)）により，$U(\mathfrak{a})$ 加群の準同型写像 $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$ は定数倍を除いて一意的である．したがって κ も定数倍を除いて一意的である．∎

3.29 ［注意］　命題3.28において，$\mathbf{K}$ は代数閉体であると仮定したが，カッツ・ムーディ・リー代数が有限次元単純リー代数になる場合には，この仮定を落とすことができる．これは，カッツ・ムーディ・リー代数の係数拡大がやはりカッツ・ムーディ・リー代数になることを用いて代数閉体の場合に帰着させることもできるが，次のようにしても証明できる．上に述べた命題3.28の証明では，有限次元既約 $U(\mathfrak{a})$ 加群 L に対して，L の自己準同型写像 $\varphi : L \to L$ が恒等写像の定数倍に限ること（シューアの補題）が用いられており，そこに $\mathbf{K}$ が代数閉体であるという仮定が必要であった．よってこれをカッツ・ムーディ・リー代数に対して直接示せばよい．本章4節で示すように，L は最高ウェイト加群である．よって，その自己準同型写像 $\varphi : L \to L$ は最高ウェイト・ベクトル ℓ をその定数倍 $c\ell$ に移すが，L は最高ウェイト・ベクトルにより生成されるので，$\varphi = c\,\mathrm{id}$ となり，主張が示される．

3.30 ［例］　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{K})$ とする．$\mathfrak{gl}_n(\mathbf{K})$ への埋め込みから定まる $\mathfrak{g}$ の 表現に例2.48を適用して，$\mathfrak{g}$ 上の不変形式 $\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$ が得られる．命題3.28と注意3.29により，$\kappa_{\mathfrak{g}} = c\kappa$ となるので，（例えば）カルタン部分代数の元 h に対して，$\kappa(h, h)$ と $\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h)$ を比較することにより，$c = 2n$ がわかる．すなわち $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbf{K})$ のキリング形式は，

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = 2n\,\mathrm{Tr}(xy)$$

により与えられる．なお，他の古典型単純リー代数についても，全く同様の議論が成立するので，各自試みられよ．□

以下，$\mathfrak{a}$ を有限次元リー代数とし，非退化な不変形式 $\kappa : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbf{K}$ が与えられているものとする．

$\mathfrak{a}$ の基底 $\{x_i\}_{i=1}^n$ を 1 つ選び，$\{x^i\}_{i=1}^n$ を $\kappa(x_i, x^j) = \delta_{ij}$ により定める．κ は非退化なので，ベクトル空間の同型写像 $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$ が $x \mapsto [y \mapsto \kappa(y, x)]$ により得られるが，この同型のもとで $\{x_i\}_{i=1}^n$ の双対基底に対応するのが，$\{x^i\}_{i=1}^n$ である．したがって $\{x^i\}_{i=1}^n$ も $\mathfrak{a}$ の基底である（$\{x^i\}_{i=1}^n$ を κ に関する $\{x_i\}_{i=1}^n$ の双対基底と呼ぶ）．そこで包絡代数 $U(\mathfrak{a})$ の元 Ω を

$$\Omega = \sum_{i=1}^n x_i x^i \tag{3.12}$$

により定め，これを $\mathfrak{a}$ の（κ に関する）**カシミール元** (Casimir element) と呼ぶ．これは $\mathfrak{a}$ の基底 $\{x_i\}_{i=1}^n$ の取り方によらない．実際 $\mathfrak{a}$ の別の基底 $\{y_i\}_{i=1}^n, \{y^i\}_{i=1}^n$ があって $\kappa(y_i, y^j) = \delta_{ij}$ であるとする．$y_j = \sum_i c_{ij} x_i, x^i = \sum_j d_{ij} y^j$ と書くとき，

$$d_{ij} = \kappa(y_j, \sum_k d_{ik} y^k) = \kappa(y_j, x^i) = \kappa(\sum_k c_{kj} x_k, x^i) = c_{ij}$$

となるので，$x^i = \sum_j c_{ij} y^j$ である．したがって

$$\sum_j y_j y^j = \sum_{i,j} c_{ij} x_i y^j = \sum_i x_i (\sum_j c_{ij} y^j) = \sum_i x_i x^i$$

となり，Ω が基底の選び方によらないことがわかった．

3.31［定理］　カシミール元 Ω は包絡代数 $U(\mathfrak{a})$ の中心に属する．すなわち，任意の $u \in U(\mathfrak{a})$ に対して $u\Omega = \Omega u$ が成り立つ．

証明　任意の $a \in \mathfrak{a}$ に対して $a\Omega = \Omega a$ を示せばよい．$\mathfrak{a}$ の 2 つの基底 $\{x_i\}_{i=1}^n$, $\{x^i\}_{i=1}^n$ について $\kappa(x_i, x^j) = \delta_{ij}$ であるとする．$[a, x_i] = \sum_j c_{ij} x_j, [a, x^j] = \sum_k d_{jk} x^k$ であるとすると，

$$c_{ij} = \kappa([a, x_i], x^j) = -\kappa(x_i, [a, x^j]) = -d_{ji}$$

である．したがって

$$a\Omega - \Omega a = \sum_i a x_i x^i - \sum_i x_i x^i a = \sum_i [a, x_i] x^i + \sum_i x_i [a, x^i]$$

$$= \sum_{i,j} c_{ij} x_j x^i + \sum_{i,k} d_{ik} x_i x^k = \sum_{i,j} (c_{ij} + d_{ji}) x_j x^i = 0$$

となり，主張が示された．∎

カシミール元は，表現の研究において重要な役割を果たす．

以下 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ は，そのすべての既約成分が有限型となるカルタン行列とし，対応する有限次元カッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi_A)$ に対して，以上の考察を適用する．

3.32 ［補題］　$\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} = \sum_{i \in I} \mathbf{Q} h_i$ とおく．$h, h' \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ に対して $\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h') \in \mathbf{Q}$ が成り立つ．また $\kappa_{\mathfrak{g}}|\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \times \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} : \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \times \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q}$ は正定値である．

証明　$h, h' \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ とする．$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha\right)$ とルート空間分解されるが,

$$\mathrm{ad}(h)\,\mathrm{ad}(h')(\mathfrak{h}) = \{0\}, \qquad \mathrm{ad}(h)\,\mathrm{ad}(h')x = \alpha(h)\alpha(h')x \quad (x \in \mathfrak{g}_\alpha)$$

により，

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\alpha(h')$$

が成り立つ．ここで $\alpha \in \Delta$ に対して $\alpha(h), \alpha(h')$ は有理数なので, $\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h') \in \mathbf{Q}$ である．$h = h'$ のときを考えると，

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h) = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)^2$$

であるが，$\alpha(h)$ は有理数なので，$\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h) \geqq 0$ が成り立つ．また $\kappa_{\mathfrak{g}}(h, h) = 0$ となるとすると，すべての $\alpha \in \Delta$ に対して $\alpha(h) = 0$ となるが，$\{\alpha_i\}_{i \in I} (\subset \Delta)$ は $\mathfrak{h}^*$ の基底なので，$h = 0$ でなければならない．∎

3.33 ［系］　$\mathfrak{g}$ のキリング形式は非退化な標準不変形式である（第2章5節参照）．

証明　まずキリング形式が非退化であることを示そう．A の既約分解に対応する $\mathfrak{g}$ の分解 (3.2) において，各成分 $\mathfrak{g}(\Phi_{A^{(k)}})$ は単純イデアルである．したがっ

て命題 3.24 により，$\mathfrak{g}(\Phi_{A^{(k)}})$ のキリング形式が非退化であることを示せばよい．よって，はじめから A は既約（したがって $\mathfrak{g}$ は単純リー代数）としてよい．このとき，命題 3.25 により，キリング形式が恒等的に 0 ではないことを示せばよいが，これは補題 3.32 により明らか．

κ から定まる $\mathfrak{h}^* = \sum_{i\in I} \mathbf{K}\alpha_i$ 上の対称双線形式 (2.116) において，$(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbf{Q}_{>0}$ となることを見よう．補題 3.32 により，$t_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} = \sum_{i\in I} \mathbf{Q}h_i$ を示せばよい．$\kappa|\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \times \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{Q}$ 上の対称双線形形式として非退化なので，$t \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ であって $\kappa(t, h_j) = \alpha_i(h_j)$ を満たすものがただ 1 つ存在する．ところが t_{α_i} の定義により，$\kappa(t_{\alpha_i}, h_j) = \alpha_i(h_j)$ である．したがって $t_{\alpha_i} = t \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ である．■

3.34［注意］　カルタン行列 A の既約分解 $A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(r)}$ に対応する $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi_A)$ の分解を

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathfrak{g}_k \qquad (\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}(\Phi_{A^{(k)}}))$$

とする．命題 3.27 と注意 3.29 により，$\mathfrak{g}$ 上の不変形式 κ は $c_1, \ldots, c_r \in \mathbf{K}$ を用いて，

$$\kappa(\sum_{k=1}^{r} x_k, \sum_{k=1}^{r} y_k) = \sum_{k=1}^{r} c_k \kappa_{\mathfrak{g}_k}(x_k, y_k) \qquad (x_k, y_k \in \mathfrak{g}_k) \tag{3.13}$$

と書ける．このとき κ が非退化であるための必要十分条件は，任意の k について $c_k \neq 0$ が成り立つことである．また κ が非退化な標準不変形式になるための必要十分条件は，任意の k について $c_k \in \mathbf{Q}_{>0}$ が成り立つことである．

以下 κ は $\mathfrak{g}$ 上の非退化な標準不変形式とし，対応する $\mathfrak{h}^* = E = \sum_{i\in I} \mathbf{K}\alpha_i$ 上の標準形式 (2.116) を考える．

3.35［補題］　$\alpha \in \Delta$ に対して $(\alpha, \alpha) \in \mathbf{Q}_{>0}$ で，さらに

$$\alpha^\vee = \frac{2t_\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \qquad \lambda(\alpha^\vee) = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}^*).$$

証明　$(\alpha, \alpha) \in \mathbf{Q}_{>0}$ と $\lambda(\alpha^\vee) = 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ は既に命題 2.47 および命題 2.46 で示されている．また

$$\kappa(\alpha^\vee, t_\lambda) = \lambda(\alpha^\vee) = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \kappa\left(\frac{2t_\alpha}{(\alpha, \alpha)}, t_\lambda\right)$$

が任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について成立しているので，$\alpha^\vee = 2t_\alpha/(\alpha,\alpha)$ である． ∎

カシミール元の具体形を求めよう．$\mathfrak{h}$ の基底 $\{t_k\}_{k=1}^n$ を 1 つ固定する．$\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ は非退化なので，$\kappa|\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}$ に関する $\{t_k\}_{k=1}^n$ の双対基底 $\{t^k\}_{k=1}^n$ がとれる．また $\alpha \in \Delta$ に対して $\kappa(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$ なので，各 $\alpha \in \Delta$ に対して $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を適当に選んで，$\kappa(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ $(\alpha \in \Delta)$ となるようにできる．このとき $\{t^k\}_{k=1}^n \cup \{e_{-\alpha}|\alpha\in\Delta\}$ は，κ に関する $\{t_k\}_{k=1}^n \cup \{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ の双対基底である．したがって

$$\Omega = \sum_{k=1}^n t_k t^k + \sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha e_{-\alpha} = \sum_{k=1}^n t_k t^k + \sum_{\alpha\in\Delta^+} (e_\alpha e_{-\alpha} + e_{-\alpha} e_\alpha)$$

となる．ここで

$$e_\alpha e_{-\alpha} = e_{-\alpha}e_\alpha + [e_\alpha, e_{-\alpha}] = e_{-\alpha}e_\alpha + \kappa(e_\alpha, e_{-\alpha})t_\alpha = e_{-\alpha}e_\alpha + t_\alpha$$

を用いると，

$$\Omega = \sum_{k=1}^n t_k t^k + t_{2\rho} + 2\sum_{\alpha\in\Delta^+} e_{-\alpha}e_\alpha \tag{3.14}$$

が得られた．ただし，

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha \in \mathfrak{h}^* \tag{3.15}$$

である．

次の事実は有限次元表現論において重要な役割を果たす．

3.36［命題］　M を最高ウェイト λ の最高ウェイト加群とするとき，カシミール元 Ω は M に定数倍 $(\lambda, \lambda+2\rho)\,\mathrm{id}$ により作用する．

証明　m を M の最高ウェイト・ベクトルとする．$\alpha\in\Delta^+$ のとき $\mathfrak{g}_\alpha m = \{0\}$ なので，(3.14) により

$$\Omega m = (\sum_{k=1}^n \lambda(t_k)\lambda(t^k) + \lambda(t_{2\rho}))m$$

となる．$t_\lambda = \sum_{k=1}^n c_k t^k$ とすると $c_k = (t_\lambda, t_k) = \lambda(t_k)$ なので，$t_\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda(t_k)t^k$ である．したがって $(\lambda,\lambda) = \lambda(t_\lambda) = \sum_{k=1}^n \lambda(t_k)\lambda(t^k)$ である．また定義から $\lambda(t_{2\rho}) = 2(\lambda,\rho)$．よって $\Omega m = (\lambda, \lambda+2\rho)m$ である．

$M = U(\mathfrak{g})m$ なので，任意の $v \in M$ は $v = um$ $(u \in U(\mathfrak{g}))$ と書ける．Ω は $U(\mathfrak{g})$ の中心に属するので，

$$\Omega v = \Omega um = u\Omega m = (\lambda, \lambda + 2\rho)um = (\lambda, \lambda + 2\rho)v.$$

以上で主張が示された． ∎

(3.15) で導入された $\rho \in \mathfrak{h}^*$ は，表現論のいろいろな場所に顔を出す重要な元である[7]．ここでその基本的性質について見ておこう．

3.37 ［命題］

(i) 任意の $i \in I$ に対して $\rho(h_i) = 1$ である．

(ii) $w \in W$ に対して

$$\rho - w\rho = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^-} \alpha.$$

証明 (ii) $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$ なので, $\Delta^+ = (\Delta^+ \cap w\Delta^+) \sqcup (\Delta^+ \cap w\Delta^-)$, $w\Delta^+ = (\Delta^+ \cap w\Delta^+) \sqcup (\Delta^- \cap w\Delta^+)$ であるが，$\Delta^- = -\Delta^+$ により，$\Delta^- \cap w\Delta^+ = -(\Delta^+ \cap w\Delta^-)$ が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
\rho - w\rho &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha - \sum_{\alpha \in w\Delta^+} \alpha\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^+} \alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^-} \alpha - \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^+} \alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^-} \alpha\Big) \\
&= \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^-} \alpha.
\end{aligned}$$

(i) 命題 2.30 により，$\Delta^+ \cap s_i\Delta^- = \{\alpha_i\}$ である．したがって (ii) により $s_i\rho = \rho - \alpha_i$ である．一方，s_i の定義により，$s_i\rho = \rho - \rho(h_i)\alpha_i$ である．したがって $\rho(h_i) = 1$ となる． ∎

---

[7] 以前は ρ ではなく δ と書かれることが多かったが，最近は ρ を使うほうが主流のような気がする．δ はアフィン・リー代数の虚ルートを表すことが多い．

4. 有限次元表現

この節でも，$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ は，そのすべての既約成分が有限型となるカルタン行列とし，対応する有限次元カッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi_A)$ の有限次元表現に関して考察を行う．記号は第 2 章 6 節に従う．

$\mathfrak{h}^*$ の部分集合 P, P^+ を

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(h_i) \in \mathbf{Z}\ (i \in I)\} \tag{3.16}$$

$$P^+ = \{\lambda \in P | \lambda(h_i) \geqq 0\ (i \in I)\} \tag{3.17}$$

により定める．P の元を**整ウェイト**（integral weight）と呼び，P^+ の元を**優整ウェイト**（dominat integral weight）と呼ぶ．このとき，

$$Q = \sum_{i\in I} \mathbf{Z}\alpha_i \subset P \subset \sum_{i\in I} \mathbf{Q}\alpha_i. \tag{3.18}$$

実際，$\alpha_j(h_i) = a_{ij} \in \mathbf{Z}$ なので Q は P に含まれる．また $P \subset \sum_{i\in I} \mathbf{Q}\alpha_i$ は次のようにして示される．カルタン行列 $A = (\alpha_j(h_i))_{i,j\in I}$ の正則性により $\sum_{i\in I} \mathbf{Q}\alpha_i$ は $\sum_{i\in I} \mathbf{Q}h_i$ の双対空間と見なせるので，$\lambda \in P$ に対して $\mu \in \sum_{i\in I} \mathbf{Q}\alpha_i$ であって，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i) = \mu(h_i)$ となるものが存在する．このとき $\lambda = \mu \in \sum_{i\in I} \mathbf{Q}\alpha_i$ となる．

以下 $\mathfrak{g}$ 上の非退化な標準不変形式 κ を固定する．したがって，カシミール元や $\mathfrak{h}^*$ 上の標準形式を考えるときには，この κ から定まるものをとる．

$\lambda(h_i) = 2(\lambda, \alpha_i)/(\alpha_i, \alpha_i)$ であるが，$(\alpha_i, \alpha_i) \in \mathbf{Q}_{>0}$ なので，

$$\begin{aligned} P^+ &= \{\lambda \in P | (\lambda, \alpha_i) \geqq 0\ (i \in I)\} \\ &= \{\lambda \in P | (\lambda, \alpha) \geqq 0\ (\alpha \in \Delta^+)\} \end{aligned}$$

とも書ける．

$\mathfrak{h}$ の基底 $\{h_i\}_{i\in I}$ の双対基底を $\{\varpi_i\}_{i\in I}$ とする．すなわち $i \in I$ に対して $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*$ を

$$\varpi_i(h_j) = \delta_{ij} \quad (j \in I)$$

により定める．定義から明らかに $\varpi_i \in P^+$ で，しかも

$$P = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{Z}\varpi_i \tag{3.19}$$

$$P^+ = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}_{\geqq 0} \varpi_i \tag{3.20}$$

が成り立つ．特に P は $\mathfrak{h}^*$ の格子である．ϖ_i を**基本ウェイト**（fundamental weight）と呼ぶ．命題 3.37 により，

$$\rho = \sum_{i \in I} \varpi_i \tag{3.21}$$

である．

3.38［**補題**］

(i) P は W 不変である．

(ii) P^+ は W の P への作用に関する軌道の完全代表系をなす．すなわち $P = W(P^+)$ で，しかも任意の $\lambda \in P^+$ に対して $W(\lambda) \cap P^+ = \{\lambda\}$ が成り立つ．

(iii) $\lambda \in P^+$ とするとき，λ の固定部分群 $\{w \in W | w(\lambda) = \lambda\}$ は $\{s_i | i \in I, \lambda(h_i) = 0\}$ により生成される．

証明　$\lambda \in P$ とする．$i \in I$ に対して $s_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ であるが，$\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}, \alpha_i \in Q \subset P$ なので，$s_i(\lambda) \in P$ である．(i) が示された．

$\lambda \in P$ とする．W は有限群なので $W(\lambda)$ は $\mathfrak{h}^*$ の有限部分集合である．したがって，$\mathfrak{h}^*$ 上の標準半順序 (2.117) に関して，$W(\lambda)$ の極大元 μ がとれる．$i \in I$ に対して $s_i(\mu) = \mu - \mu(h_i)\alpha_i \in W(\lambda)$ であるが，μ の極大性により，$\mu(h_i) \geqq 0$ でなければならない．したがって $\mu \in P^+$ である．$P = W(P^+)$ が示された．

$J = \{i \in I | \lambda(h_i) = 0\}$ とし，$\{s_i | i \in J\}$ により生成される W の部分群を W' で表す．$i \in J$ ならば $s_i(\lambda) = \lambda$ なので，$w \in W'$ に対して $w(\lambda) = \lambda$ が成立する．したがって，(ii) の残りの主張と (iii) を示すには

$$\lambda \in P^+, w \in W, w(\lambda) \in P^+ \quad \Longrightarrow \quad w \in W'$$

をいえばよい．$\ell(w)$ に関する帰納法を用いる．$\ell(w) = 0$ すなわち $w = 1$ のときは明らか．$\ell(w) = r > 0$ とする．w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を 1 つ選ぶ．

補題 2.36 により,

$$w(\alpha_{i_r}) = s_{i_1} \cdots s_{i_r}(\alpha_{i_r}) = -s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}(\alpha_{i_r}) \in \Delta^-$$

である．したがって

$$0 \leqq (\lambda, \alpha_{i_r}) = (w(\lambda), w(\alpha_{i_r})) \leqq 0$$

により，$(\lambda, \alpha_{i_r}) = 0$ がわかる．したがって $i_r \in J$ である．$y = s_{i_1} \cdots s_{i_{r-1}}$ とおくと，$y(\lambda) = ys_{i_r}(\lambda) = w(\lambda) \in P^+$ となるが，$\ell(y) < r$ なので帰納法の仮定により，$y \in W'$ でなければならない．したがって $w = ys_{i_r} \in W'$ となる．∎

3.39 [補題]

(i) $\lambda \in P$ に対して $(\lambda, \lambda) \in \mathbf{Q}_{\geqq 0}$ が成り立つ．

(ii) $\lambda, \mu \in P^+$ が，$\mathfrak{h}^*$ 上の標準半順序に関して $\lambda \geqq \mu$ を満たすとき，$(\lambda, \lambda) - (\mu, \mu) \in \mathbf{Q}_{\geqq 0}$ が成立する．

(iii) $\lambda, \mu \in P^+$ が，$\mathfrak{h}^*$ 上の標準半順序に関して $\lambda > \mu$ を満たすとき，$(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + \rho, \mu + \rho) \in \mathbf{Q}_{>0}$ が成立する．

証明　(i) $\lambda \in P$ とする．$P \subset \sum_{i \in I} \mathbf{Q}\alpha_i$ であるが, 命題 2.47 により $(\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbf{Q}$ なので，$(\lambda, \lambda) \in \mathbf{Q}$ が従う．また $\sum_{i \in I} \mathbf{R}\alpha_i$ 上の標準形式は正定値なので，$(\lambda, \lambda) \geqq 0$ である．

(ii) 仮定により $\lambda - \mu = \sum_{i \in I} n_i\alpha_i$ $(n_i \in \mathbf{Z}_{\geqq 0})$ と書ける．よって

$$(\lambda, \lambda) - (\mu, \mu) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = \sum_{i \in I} n_i(\lambda + \mu, \alpha_i)$$
$$= \sum_{i \in I} n_i(\lambda + \mu)(h_i)\frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geqq 0.$$

(iii) $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + \rho, \mu + \rho)$ を展開すると,

$$(\lambda + \rho, \lambda + \rho) - (\mu + \rho, \mu + \rho) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu) + 2(\rho, \lambda - \mu)$$

となるが，(ii) により $(\lambda,\lambda)-(\mu,\mu)\geqq 0$ である．したがって $(\rho,\lambda-\mu)>0$ を示せばよい．$\lambda-\mu=\sum_{i\in I}n_i\alpha_i$ $(n_i\in\mathbf{Z}_{\geqq 0})$ とすると，命題 3.37 により

$$(\rho,\lambda-\mu)=\sum_{i\in I}n_i(\rho,\alpha_i)=\sum_{i\in I}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}n_i\rho(h_i)=\sum_{i\in I}\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}n_i$$

であるが，$\lambda\neq\mu$ により $n_i>0$ となる $i\in I$ が存在するので，$(\rho,\lambda-\mu)>0$ がわかる． ∎

3.40［補題］　任意の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群 V はウェイト空間の直和で，そのウェイトはすべて整ウェイトである．すなわち，

$$V=\bigoplus_{\lambda\in P}V_\lambda.$$

証明　V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．(2.69) の同型写像 $\varphi_i:\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})\to\mathfrak{a}_i=\mathbf{K}h_i+\mathbf{K}e_i+\mathbf{K}f_i$ により，V を有限次元 $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K}))$ 加群と思い，これに系 1.66 を適用すると，h_i の V への作用は対角化可能で，その固有値はすべて整数になることがわかる．よって補題 1.55 と $\mathfrak{h}=\sum_{i\in I}\mathbf{K}h_i$ により，V はウェイト空間の直和となる．また λ を V のウェイトとすると，$\lambda(h_i)$ は h_i の V への作用の固有値なので，整数である．したがって $\lambda\in P$ もわかる． ∎

3.41［定理］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 V に関して，次の (a), (b), (c) は同値である．

(a) V は有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．

(b) V は可積分な最高ウェイト加群である．

(c) V は，ある $\lambda\in P^+$ に対する $L(\lambda)$ と同型である．

したがって $\{$ 有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群の同型類 $\}=\{L(\lambda)|\lambda\in P^+\}$ である．

証明　(c)⇒(a) $\lambda\in P^+$ に対して $\dim L(\lambda)<\infty$ となることを示せばよい．$L(\lambda)$ はウェイト加群なので，$\Gamma=\mathrm{Wt}(L(\lambda))$ が有限集合であることを示せばよい．系 2.64 により，$L(\lambda)$ は可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群なので，命題 2.21 により，$W(\Gamma)=\Gamma$ が成立する（W はワイル群）．よって補題 3.38 により，$\Gamma=W(\Gamma\cap P^+)$ が成り立つ．W は有限群なので，$\Gamma\cap P^+$ が有限集合であることを示せばよい．$\mu\in\Gamma$

に対して $\mu \leqq \lambda$ なので，補題 3.39 により，$\mu \in \Gamma \cap P^+$ に対して $(\mu, \mu) \leqq (\lambda, \lambda)$ が成り立つ．ところが，補題 3.1 により $\{\mu \in P | (\mu, \mu) \leqq (\lambda, \lambda)\}$ は有限集合なので，$\Gamma \cap P^+$ も有限集合である．

(a)⇒(b) V を有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．$\mathrm{Wt}(V)$ は有限集合なので，そのうちで標準半順序に関して極大なものをとることができる．それを λ とすると，$V_\lambda \neq \{0\}$ なので，$v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ がとれる．このとき，V の既約性により $V = U(\mathfrak{g})v$ である．また $i \in I$ に対して $e_i v \in \mathfrak{g}_{\alpha_i} V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha_i}$ であるが，λ の極大性により，$\lambda + \alpha_i$ は V のウェイトでない．したがって $e_i v = 0$ $(i \in I)$ が成り立つ．以上により V は最高ウェイト加群であることがわかった．V が可積分であることは，$\dim V < \infty$ により明らか．

(b)⇒(c) V を可積分な最高ウェイト加群とする．命題 2.63 により，その最高ウェイト λ は P^+ に属する．よって V が既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群であることを示せばよい．$V' \neq \{0\}$ を V の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．V' はウェイト加群でそのウェイト μ は $\mu \leqq \lambda$ を満たす．したがって V' のウェイト μ のうちで，標準半順序に関して極大なものがとれる．$v \in V'_\mu \setminus \{0\}$ とするとき，μ の極大性により，任意の $i \in I$ に対して $\mu + \alpha_i \notin \mathrm{Wt}(V')$ が成り立つ．したがって $e_i v = 0$ $(i \in I)$ である．よって $V'' = U(\mathfrak{g})v$ は μ を最高ウェイトとする最高ウェイト加群である．V が可積分なので V'' も可積分になり，したがって $\mu \in P^+$ である．さて命題 3.36 により，カシミール元 Ω は V に定数倍 $(\lambda, \lambda + 2\rho)\,\mathrm{id}$ で作用し，V'' に定数倍 $(\mu, \mu + 2\rho)\,\mathrm{id}$ で作用する．V'' は V の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群なので，$(\lambda, \lambda + 2\rho) = (\mu, \mu + 2\rho)$，すなわち $(\lambda + \rho, \lambda + \rho) = (\mu + \rho, \mu + \rho)$ が成立する．ところが，μ は V のウェイトなので $\mu \leqq \lambda$ である．したがって補題 3.39(iii) により，$\mu = \lambda$ でなければならない．よって V'' は V の最高ウェイト・ベクトルを含み，$V = V''$ である．したがって $V = V'$ が成り立つ．以上により，V の $\{0\}$ でない部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群は V のみであることが示されたので，V は既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．　∎

3.42 [系]　$\lambda \in P^+$ に対して，

$$L(\lambda) = M(\lambda) / \sum_{i \in I} U(\mathfrak{g}) f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda$$

$$= U(\mathfrak{g})/\left(\sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})e_i + \sum_{h\in\mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h-\lambda(h)) + \sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})f_i^{\lambda(h_i)+1}\right).$$

証明　$U(\mathfrak{g})$ 加群 V を $V = M(\lambda)/\sum_{i\in I} U(\mathfrak{g})f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$ により定める．命題 2.62 と命題 2.63 により，V は可積分な最高ウェイト加群で，最高ウェイト λ をもつ．したがって，定理 3.41 により，$V \cong L(\lambda)$ である．∎

3.43［例］　$\mathfrak{g}$ の自明表現（例 1.32）から定まる 1 次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群は，最高ウェイト $0 \in P^+$ をもつ既約最高ウェイト加群なので，$L(0)$ と同型である．□

3.44［例］　カルタン行列 A は既約であるとする．このとき $\mathfrak{g}$ は有限次元単純リー代数である．$\mathfrak{g}$ の随伴表現（例 1.33）により，$\mathfrak{g}$ を $U(\mathfrak{g})$ 加群と思う．$\mathfrak{g}$ の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群とは $\mathfrak{g}$ のイデアルのことに他ならないが，$\mathfrak{g}$ は単純リー代数なので，$U(\mathfrak{g})$ 加群としては，有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群になっている．よって定理 3.41 により，$\mathfrak{g} \cong L(\theta)$ なる $\theta \in P^+$ が存在する．$\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}) = \Delta \cup \{0\}$ なので，θ は

$$\theta \in P^+ \cap \Delta^+, \qquad \alpha \leqq \theta \quad (\alpha \in \Delta)$$

を満たす．この θ を $\mathfrak{g}$ の**最高ルート**（highest root）と呼ぶ．□

3.45［例］　A が (A_ℓ) 型カルタン行列である場合を考える．このとき $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ と同一視できるのであった（同型写像は命題 3.15 の証明に用いられたものを使う）．埋め込み $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K}) \to \mathfrak{gl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ により，$\mathfrak{g}$ の表現が定まり，これにより $V = \mathbf{K}^{\ell+1}$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群となるが，これを $\mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbf{K})$ の**自然表現**（natural representation）（あるいはベクトル表現）と呼ぶ．$\mathbf{K}^{\ell+1}$ の自然基底を $\{v_k\}_{k=1}^{\ell+1}$ とするとき，

$$v_1 \in V_{\varpi_1}, \qquad e_i v_1 = 0 \ (1 \leqq i \leqq \ell), \qquad V = U(\mathfrak{g})v_1$$

が容易にわかり，したがって $V \cong L(\varpi_1)$ である．□

3.46［問題］　A が $(\mathrm{B}_\ell), (\mathrm{C}_\ell), (\mathrm{D}_\ell)$ の各型のカルタン行列の場合にも，本章 2 節で与えられた $\mathfrak{g}$ の具体的表示を用いて自然に定まる表現に関して，同様の考察を行え．

3.47［定理］　任意の有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群は完全可約である．

証明　V を有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．カシミール元 Ω の V への作用に関する広義固有空間分解

$$V = \bigoplus_{a \in \mathbf{K}} V(\Omega, a),$$

$$V(\Omega, a) = \{v \in V |\ \text{ある}\ n > 0\ \text{に対して}\ (\Omega - a\,\mathrm{id})^n v = 0\}$$

を考えると，Ω は $U(\mathfrak{g})$ の中心に属するので，各 $V(\Omega, a)$ は部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．したがって各 $V(\Omega, a)$ が完全可約であることを示せばよい．すなわち，はじめから $V = V(\Omega, a)$ としてよい．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\tilde{V}_\lambda = \{v \in V_\lambda | e_i v = 0\ (i \in I)\}$$

とおく．また $\Gamma = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \tilde{V}_\lambda \neq \{0\}\}$ とおく．$\lambda \in \Gamma, v \in \tilde{V}_\lambda \setminus \{0\}$ とすると，$U(\mathfrak{g})v$ は λ を最高ウェイトとする可積分最高ウェイト加群なので，定理 3.41 により，$\lambda \in P^+$ で，しかも $U(\mathfrak{g})v$ は既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．また命題 3.36 により，Ω は $U(\mathfrak{g})v$ に定数倍 $(\lambda, \lambda + 2\rho)\,\mathrm{id}$ で作用しているが，$V = V(\Omega, a)$ なので，任意の $\lambda \in \Gamma$ に対して $(\lambda, \lambda + 2\rho) = a$ が成り立つ．$V' = \sum_{\lambda \in \Gamma} U(\mathfrak{g})\tilde{V}_\lambda$ とおく．V' は既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群の和なので，命題 1.48 により完全可約な部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群である．よって $V = V'$ を示せばよい．

$V \neq V'$ とする．V/V' のウェイトのうちで極大なもの μ をとり，$\overline{v} \in (V/V')_\mu \setminus \{0\}$ を 1 つ選ぶ．このとき $\overline{v}$ は V_μ の元 v で代表されているとしてよい．$e_i\overline{v} = 0\ (i \in I)$ なので，$U(\mathfrak{g})\overline{v}$ は μ を最高ウェイトとする可積分最高ウェイト加群である．よって $\mu \in P^+$ である．また，$V = V(\Omega, a)$ なので $(\mu, \mu + 2\rho) = a$ が成り立つ．$i \in I$ に対して $e_i v \in V'$ であるが，もしも任意の $i \in I$ に対して $e_i v = 0$ となるとすると，$v \in \tilde{V}_\mu \subset V'$ となり，$\overline{v} \neq 0$ に矛盾する．したがって，ある $i \in I$ に対して $e_i v \in V_{\mu + \alpha_i} \setminus \{0\}$ が成立する．よって $\mu + \alpha_i$ は V' のウェイトである．V' は $\lambda \in \Gamma$ を最高ウェイトとする最高ウェイト加群の和だったので，ある $\lambda \in \Gamma$ に対して，$\mu + \alpha_i \leqq \lambda$ である．特に $\mu < \lambda$ が成り立つ．ところが，$\lambda, \mu \in P^+$ で $(\lambda, \lambda + 2\rho) = (\mu, \mu + 2\rho) = a$ だったので，これは補題 3.39 に矛盾する．したがって $V = V'$ である．∎

定理 3.41 および定理 3.47 により，有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群の研究は，$\lambda \in P^+$ に対する $L(\lambda)$ の研究に帰着された．最も重要な問題は，$\lambda \in P^+$ に対する指標

$\mathrm{ch}(L(\lambda))$ の決定であり，その解答は，既に 20 世紀前半に ワイル（H. Weyl）により与えられている（ワイルの指標公式）．その証明もいろいろあるのだが，ここでは，バーンスタイン・ゲルファント・ゲルファントによる純代数的証明をさらに改良した，（対称化可能なカルタン行列に対応するカッツ・ムーディ・リー代数でも通用する）カッツによる証明を述べる．

しばらくより広い視点から指標について考察する．

3.48 [命題]　$\lambda \in P$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群 M があるとする．このとき，M の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群の有限増大列

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M \tag{3.22}$$

と，$\mu_1, \ldots, \mu_r \in P$ が存在して，次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\mu_r = \lambda, \qquad \mu_i < \lambda \quad (1 \leqq i < r),\\
&(\mu_i + \rho, \mu_i + \rho) = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) \quad (1 \leqq i \leqq r),\\
&M_i/M_{i-1} \cong L(\mu_i) \quad (1 \leqq i \leqq r).
\end{aligned}$$

証明　$a = (\lambda + \rho, \lambda + \rho) \in \mathbf{Q}_{\geqq 0}$ とおく．P はユークリッド空間 $\sum_{i \in I} \mathbf{R}\alpha_i$ の格子なので，

$$\Gamma_a = \{\mu \in P | (\mu + \rho, \mu + \rho) = a\}$$

は有限集合である．よって $n(M) = \sum_{\mu \in \Gamma_a} \dim M_\mu$ は有限の数として確定する．また $\dim M_\lambda = 1$ なので，$n(M) \geqq 1$ である．以下，定理の主張を $n(M)$ に関する帰納法で示す．

$n(M) = 1$ とする．M が既約でないと仮定する．自明でない部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群 V をとるとき，そのウェイトのうちで極大なもの μ に関して，$\mu \in P, \mu < \lambda$ が成り立つ．また $m \in V_\mu \setminus \{0\}$ を選ぶとき，$U(\mathfrak{g})m$ は最高ウェイト μ の最高ウェイト加群である．カシミール元 Ω は，M に定数倍 $(\lambda, \lambda + 2\rho)\,\mathrm{id}$ で，また $U(\mathfrak{g})m$ には定数倍 $(\mu, \mu + 2\rho)\,\mathrm{id}$ で作用するので，$(\lambda, \lambda + 2\rho) = (\mu, \mu + 2\rho)$，すなわち $(\mu + \rho, \mu + \rho) = a$ が成り立つ．よって $\mu \in \Gamma_a$ である．これは $n(M) = 1$ に矛盾する．よって $M \cong L(\lambda)$ となり，定理の主張は明らか．

$n(M) > 1$ とする．M が既約ならば明らかなので，M は既約でないと仮定する．$n(M) = 1$ のときの議論と全く同様にして，$\mu \in P, \mu < \lambda$ と $m \in$

$M_\mu \setminus \{0\}$ が存在して，$U(\mathfrak{g})m$ は最高ウェイト μ の最高ウェイト加群である．また $(\mu+\rho, \mu+\rho) = a$ が成り立つ．特に $\mu \in \Gamma_a$ である．このとき $V = U(\mathfrak{g})m, M' = M/V$ は，それぞれ最高ウェイト μ, λ をもつ最高ウェイト加群である．また一般に $\nu \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\dim V_\nu \leqq \dim M_\nu, \dim M'_\nu \leqq \dim M_\nu$ であるが，$\dim V_\lambda = 0 < 1 = \dim M_\lambda, \dim M'_\mu = \dim M_\mu - 1 < \dim M_\mu$ により，$n(V) < n(M), n(M') < n(M)$ が成り立つ．よって，V, M' に帰納法の仮定を適用することにより，M に対する定理の主張が確かめられる．∎

3.49［注意］　命題 3.48 における λ が整ウェイトであるという仮定は，実は不要である．ただし本書で必要なのは λ が整ウェイトの場合のみなので，この場合にのみ証明を与えた．

有限増大列 (3.22) を M の**組成列** (composition series) と呼び，各 M_i/M_{i-1} を M の**組成因子** (composition factor) という．また M の組成因子として $L(\mu)$ が現れる回数

$$[M : L(\mu)] = \sharp\{i | M_i/M_{i-1} \cong L(\mu)\}$$

を $L(\mu)$ の M における**重複度** (multiplicity) と呼ぶ．重複度が組成列の選び方によらないことは，Jordan-Hölder の定理と全く同様にして示すことができるが，以下の指標を用いた議論からも従う．

一般に M をウェイト加群，M' をその部分加群とするとき，補題 1.56 により，$\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(M') + \mathrm{ch}(M/M')$ である．したがって，より一般に，ウェイト加群 M の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群の有限増大列

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$$

があるとき，

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ch}(M_i/M_{i-1}) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} [M : L(\mu)] \, \mathrm{ch}(L(\mu))$$

が成立する．重複度 $[M : L(\mu)]$ が一意的に決まることは，以下に述べる $\{\mathrm{ch}(L(\mu))\}_{\mu \in \mathfrak{h}^*}$ の線形独立性から明らかである．

3.50［補題］　$\{\mathrm{ch}(L(\mu))\}_{\mu \in \mathfrak{h}^*}$ および $\{\mathrm{ch}(M(\mu))\}_{\mu \in \mathfrak{h}^*}$ は線形独立である．

証明　証明はどちらでも同じなので，$\{\mathrm{ch}(L(\mu))\}_{\mu\in\mathfrak{h}^*}$ の線形独立性を示す．$\{\mu_i\}_{i=1}^r$ が $\mathfrak{h}^*$ の相異なる元からなる有限集合で，関係式 $\sum_i c_i\,\mathrm{ch}(L(\mu_i))=0$ が成立しているとする．$\mathfrak{h}^*$ 上の標準半順序に関する $\{\mu_i\}_{i=1}^r$ の極大元を 1 つ選び，それを μ_k とする．$\mathrm{ch}(L(\mu))\in\mathbf{e}^\mu+\sum_{\nu<\mu}\mathbf{Z}\mathbf{e}^\nu$ なので，$\sum_i c_i\,\mathrm{ch}(L(\mu_i))$ における $\mathbf{e}^{\mu_k}$ の係数をみることにより，$c_k=0$ を得る．したがって，r に関する帰納法により主張が示される．∎

以下 $a\in\mathbf{Q}_{\geqq 0}$ を固定し，

$$\Gamma_a=\{\lambda\in P|(\lambda+\rho,\lambda+\rho)=a\}$$

とおく．補題 3.1 により，Γ_a は有限集合である．$\lambda\in\Gamma_a$ とすると，上の議論と命題 3.48 により，

$$\mathrm{ch}(M(\lambda))=\sum_{\mu\in\Gamma_a,\mu\leqq\lambda}q_{\mu,\lambda}\,\mathrm{ch}(L(\mu))\qquad(q_{\mu,\lambda}=[M(\lambda):L(\mu)])$$

が成り立つ．ここで，$q_{\mu,\lambda}$ は非負整数，また $q_{\lambda,\lambda}=1$ である．$\mu\not\leqq\lambda$ のときは $q_{\mu,\lambda}=0$ として，行列 $Q=(q_{\mu,\lambda})_{\mu,\lambda\in\Gamma_a}$ を考える．行列 Q の添え字集合 Γ_a を

$$\Gamma_a=\{\lambda_i|1\leqq i\leqq r\},\qquad\lambda_i<\lambda_j\Longrightarrow i<j$$

となるように番号づけるとき，Q は対角線がすべて 1 の上 3 角行列である．したがって Q の逆行列 $P=(p_{\mu,\lambda})_{\mu,\lambda\in\Gamma_a}$ が存在し，これも対角線がすべて 1 の上 3 角行列になる．また Q の成分は整数なので $\det(Q)=1$ により，P の成分も整数である．これに関して

$$\begin{aligned}\sum_{\mu\in\Gamma_a}p_{\mu,\lambda}\,\mathrm{ch}(M(\mu))&=\sum_{\mu,\nu\in\Gamma_a}p_{\mu,\lambda}q_{\nu,\mu}\,\mathrm{ch}(L(\nu))\\&=\sum_{\nu\in\Gamma_a}\Big(\sum_{\mu\in\Gamma_a}q_{\nu,\mu}p_{\mu,\lambda}\Big)\,\mathrm{ch}(L(\nu))\\&=\sum_{\nu\in\Gamma_a}\delta_{\nu,\lambda}\,\mathrm{ch}(L(\nu))\\&=\mathrm{ch}(L(\lambda))\end{aligned}$$

となる．

以上により次が示された．

3.51 [命題]　$\lambda \in P$ に対して

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \sum_{\substack{\mu \leqq \lambda, \\ (\mu+\rho,\mu+\rho)=(\lambda+\rho,\lambda+\rho)}} p_{\mu,\lambda}\, \mathrm{ch}(M(\mu)) \tag{3.23}$$

が成り立つ．ここで，$p_{\mu,\lambda}$ は整数，また $p_{\lambda,\lambda}=1$ である．

アーベル群 P の $\mathbf{Z}$ 上の群環 $\mathbf{Z}[P]$ は

$$\mathbf{Z}[P] = \bigoplus_{\mu \in P} \mathbf{Z}\mathbf{e}^{\mu}, \qquad \mathbf{e}^{\mu}\mathbf{e}^{\nu} = \mathbf{e}^{\mu+\nu}\ (\mu,\nu \in P)$$

で与えられるが，$D \in \mathbf{Z}[P]$ を

$$D = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-\mathbf{e}^{-\alpha}) \tag{3.24}$$

により定める．

以下 $\lambda \in P^+$ とし，この場合に命題 3.51 における $p_{\mu,\lambda}$ を求めることを考えよう．簡単のために

$$\Gamma = \{\mu \in P | \mu \leqq \lambda, (\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)\}$$

とおく．補題 3.1 により Γ は有限集合である．(3.23) に (2.124) を代入して，

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \left(\sum_{\mu \in \Gamma} p_{\mu,\lambda}\mathbf{e}^{\mu}\right) D^{-1} \tag{3.25}$$

が成り立つ．なお，$\mathfrak{g}$ は有限次元なので，$\Delta = \Delta_{\mathrm{re}}$，したがって任意の $\alpha \in \Delta$ に対して $\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ である．また D^{-1} は群環 $\mathbf{Z}[P]$ の外にはみ出しており，いまの場合，形式的ベキ級数環

$$R = \mathbf{Z}[[\mathbf{e}^{-\alpha_i} | i \in I]]$$

における D の逆元

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1+\mathbf{e}^{-\alpha}+\mathbf{e}^{-2\alpha}+\cdots)$$

を表しているものと思っている．したがって (3.25) は R 上の階数 1 の自由加群 $R\mathbf{e}^{\lambda}$ における等式と解釈している．(3.25) の両辺に

$$\tilde{D} = D\mathbf{e}^{\rho} \in \mathbf{Z}[P] \tag{3.26}$$

をかけると，$R\mathbf{e}^{\lambda+\rho}$ における等式

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))\tilde{D} = \sum_{\mu\in\Gamma} p_{\mu,\lambda}\mathbf{e}^{\mu+\rho} \tag{3.27}$$

を得る．ただし，この式の両辺は群環 $\mathbf{Z}[P]$ に属しているので，(3.27) は $\mathbf{Z}[P]$ における等式であると思える．

ここでワイル群 W の作用について考える．$\mathbf{Z}[P]$ への W の作用が

$$w(\sum_{\mu\in P} n_\mu \mathbf{e}^\mu) = \sum_{\mu\in P} n_\mu \mathbf{e}^{w\mu} \qquad (w\in W)$$

により定まり，各 $w\in W$ に対して

$$\mathbf{Z}[P]\to\mathbf{Z}[P] \quad (f\mapsto wf)$$

は環の準同型写像になっている．

(3.27) において $w\,\mathrm{ch}(L(\lambda))$ $(w\in W)$ を考えよう．

$$w\,\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \sum_\mu \dim L(\lambda)_\mu \mathbf{e}^{w\mu} = \sum_\mu \dim L(\lambda)_{w^{-1}\mu}\mathbf{e}^\mu$$

となるが，$L(\lambda)$ は可積分 $U(\mathfrak{g})$ 加群なので，命題 2.21 により $\dim L(\lambda)_{w^{-1}\mu} = \dim L(\lambda)_\mu$ が成り立っている．よって

$$w\,\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \mathrm{ch}(L(\lambda)) \qquad (w\in W) \tag{3.28}$$

がわかった．また

$$w\tilde{D} = (-1)^{\ell(w)}\tilde{D} \qquad (w\in W) \tag{3.29}$$

が成り立っている．これは $w=s_i$ のときに示せば十分であるが，$s_i(\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}) = \Delta^+\setminus\{\alpha_i\}$ に注意すると（命題 2.30），

$$s_i\tilde{D} = \mathbf{e}^{\rho-\alpha_i}(1-\mathbf{e}^{\alpha_i})\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\{\alpha_i\}}(1-\mathbf{e}^{-\alpha}) = -\tilde{D}$$

が成り立っている．よって

$$w(\mathrm{ch}(L(\lambda))\tilde{D}) = (-1)^{\ell(w)}\,\mathrm{ch}(L(\lambda))\tilde{D} \qquad (w\in W)$$

がわかった．したがって (3.27) において

$$w\left(\sum_{\mu\in\Gamma} p_{\mu,\lambda}\mathbf{e}^{\mu+\rho}\right) = (-1)^{\ell(w)}\sum_{\mu\in\Gamma} p_{\mu,\lambda}\mathbf{e}^{\mu+\rho} \qquad (w\in W)$$

が成立する．$\tilde{\Gamma}=\Gamma+\rho$ とおけば，これは

$$\sum_{\mu\in\tilde{\Gamma}} p_{\mu-\rho,\lambda}\mathbf{e}^{w\mu} = (-1)^{\ell(w)}\sum_{\mu\in\tilde{\Gamma}} p_{\mu-\rho,\lambda}\mathbf{e}^{\mu} \qquad (w\in W) \tag{3.30}$$

とも書ける．$\mu\in\tilde{\Gamma}$ について $p_{\mu-\rho,\lambda}\neq 0$ となっているとする．$w\mu\in P^+$ となる $w\in W$ をとるとき，(3.30) により，$w\mu\in\tilde{\Gamma}$ で，$p_{w\mu-\rho,\lambda}=(-1)^{\ell(w)}p_{\mu-\rho,\lambda}$ が成立する．したがって，

$$\tilde{\Gamma}_0=\{\mu\in\tilde{\Gamma}|p_{\mu-\rho,\lambda}\neq 0\}$$

とおくと，$\tilde{\Gamma}_0=W(\tilde{\Gamma}_0\cap P^+)$ で，しかも

$$p_{w\mu-\rho,\lambda}=(-1)^{\ell(w)}p_{\mu-\rho,\lambda} \qquad (\mu\in\tilde{\Gamma}_0, w\in W) \tag{3.31}$$

が成り立つ．したがって $\nu\in\tilde{\Gamma}_0\cap P^+$ に対する $p_{\nu-\rho,\lambda}$ が決まれば，(3.31) から，任意の $\mu\in\tilde{\Gamma}_0$ に対する $p_{\mu-\rho,\lambda}$ が決まってしまう．

$\nu\in\tilde{\Gamma}_0\cap P^+$ において，$\nu(h_i)=0$ となる $i\in I$ が存在するとする．このとき $s_i\nu=\nu$ なので，(3.31) において $w=s_i$ とすると，$p_{\nu-\rho,\lambda}=-p_{\nu-\rho,\lambda}$，したがって $p_{\nu-\rho,\lambda}=0$ となり矛盾である．よって任意の $\nu\in\tilde{\Gamma}_0\cap P^+$ と任意の $i\in I$ について $\nu(h_i)>0$ が成立する．このとき $\rho(h_i)=1$ $(i\in I)$ より $\xi=\nu-\rho\in P^+$ である．ところが $\xi\leqq\lambda$, $(\xi+\rho,\xi+\rho)=(\lambda+\rho,\lambda+\rho)$ なので，補題 3.39(iii) により，$\xi=\lambda$ でなければならない．以上により $\tilde{\Gamma}_0\cap P^+=\{\lambda+\rho\}$，$\tilde{\Gamma}_0=W(\lambda+\rho)$ が示された．

補題 3.38(iii) により，$w\in W$ に対する $w(\lambda+\rho)$ はすべて互いに相異なる．また $p_{\lambda,\lambda}=1$ と (3.31) により $p_{w(\lambda+\rho)-\rho,\lambda}=(-1)^{\ell(w)}$ である．

これで，$p_{\mu,\lambda}$ がすべて求まり，したがって $\mathrm{ch}(L(\lambda))$ が求まった．結果をまとめて次を得る．

3.52 ［定理］(ワイルの指標公式，Weyl's character formula)　$\lambda\in P^+$ に対して，

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha})}. \tag{3.32}$$

例 3.43 により，$L(0)$ は $\mathfrak{g}$ の自明表現に対応する 1 次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群であった．したがって

$$\mathrm{ch}(L(0)) = \mathbf{e}^0 = (\mathbf{Z}[P] \text{ の単位元})$$

である．よってワイルの指標公式から次を得る．

3.53 [系] (ワイルの分母公式，Weyl's denominator formula)

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha}) = \sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w\rho-\rho}.$$

環準同型写像 $\epsilon : \mathbf{Z}[P] \to \mathbf{Z}$ が $\epsilon(\mathbf{e}^\lambda) = 1$ $(\lambda \in P)$ により定まる．このとき，指標の定義により，有限次元 $U(\mathfrak{g})$ 加群 M に対して $\dim M = \epsilon(\mathrm{ch}(M))$ である．したがって，指標がわかればそれから次元もでてくるのであるが，これをワイルの指標公式に適用して (3.32) の右辺に ϵ を施そうとすると $\frac{0}{0}$ の不定形となりうまくいかない．もう少し慎重に考えよう．

$\gamma \in P$ とするとき，$f = \sum_{\mu\in P} n_\mu \mathbf{e}^\mu \in \mathbf{Z}[P]$ に対して，変数 t に関する関数 $\epsilon_\gamma(f)$ を

$$(\epsilon_\gamma(f))(t) = \sum_{\mu\in P} n_\mu e^{t(\mu,\gamma)}$$

により定める．このとき $\epsilon(f) = (\epsilon_\gamma(f))(0)$ である．したがってワイルの指標公式（と分母公式により）

$$\begin{aligned}
\dim L(\lambda) &= \epsilon(\mathrm{ch}(L(\lambda))) = \epsilon_\rho(\mathrm{ch}(L(\lambda)))|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\epsilon_\rho(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w(\lambda+\rho)-\rho})}{\epsilon_\rho(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w\rho-\rho})}\right|_{t=0} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w(\lambda+\rho),\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w(\rho),\rho)}}
\end{aligned}$$

である．また，$\ell(w) = \ell(w^{-1})$ なので，分母公式を用いると

$$\begin{aligned}
\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w(\lambda+\rho),\rho)} &= \sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(\lambda+\rho,w^{-1}\rho)} \\
&= \sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(\lambda+\rho,w\rho)}
\end{aligned}$$

$$= \epsilon_{\lambda+\rho}\Big(\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w\rho}\Big)$$
$$= \epsilon_{\lambda+\rho}\Big(\mathbf{e}^{\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha})\Big)$$
$$= e^{t(\lambda+\rho,\rho)}\prod_{\alpha\in\Delta^+}\big(1-e^{-t(\lambda+\rho,\alpha)}\big)$$

となる．$e^z=\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ を用いてこれを t について展開すると，

$$\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w(\lambda+\rho),\rho)}$$
$$= t^{|\Delta^+|}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(\lambda+\rho,\alpha)+(t\text{ について }(|\Delta^+|+1)\text{ 次以上の項の和})$$

が得られる．またここで $\lambda=0$ とすると，

$$\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w\rho,\rho)}$$
$$= t^{|\Delta^+|}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(\rho,\alpha)+(t\text{ について }(|\Delta^+|+1)\text{ 次以上の項の和})$$

を得る．よって，

$$\dim L(\lambda)=\lim_{t\to 0}\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w(\lambda+\rho),\rho)}}{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}e^{t(w(\rho),\rho)}}=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)}$$

を得る．これでもよいのだが，

$$\frac{(\lambda+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)}=\frac{2(\lambda+\rho,\alpha)/(\alpha,\alpha)}{2(\rho,\alpha)/(\alpha,\alpha)}=\frac{(\lambda+\rho)(\alpha^\vee)}{\rho(\alpha^\vee)}$$

を用いて変形して[8]次を得る．

3.54 [定理] (ワイルの次元公式, Weyl's dimension formula)　$\lambda\in P^+$ に対して

$$\dim L(\lambda)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}\frac{(\lambda+\rho)(\alpha^\vee)}{\rho(\alpha^\vee)}. \tag{3.33}$$

[8] $(\lambda+\rho)(\alpha^\vee),\rho(\alpha^\vee)\in\mathbf{Z}_{>0}$ なので，このほうが計算がしやすい．

ノート

有限次元（半）単純リー代数の理論は，W. キリング，E. カルタン，H. ワイルに始まる長い歴史をもち，Humphreys[12], 岩堀 [13], Jacobson[14], 松島 [37], 佐武 [43], 佐藤 [44], Serre[45] など，標準的教科書が既に多く存在する．本書では，カッツ・ムーディ・リー代数の観点から有限次元（半）単純リー代数の理論を述べるという，やや変則的な方法を採用したために，分類定理（定理*3.8）の証明や抽象ルート系に関する基本事項など，重要事項で欠落している部分もある．これについては，上にあげた教科書などにより補ってほしい．

4

アフィン・リー代数

無限次元カッツ・ムーディ・リー代数のうちで，その実体のよくわかる，アフィン・リー代数と呼ばれるクラスがある．カッツ・ムーディ・リー代数の抽象論は，このクラスの存在によって，有限次元単純リー代数の理論の形式的拡張にとどまらない，重要な意義をもつことになった．本章の前半では，アフィン・リー代数が，有限次元単純リー代数（とその自己同型）を用いて具体的に書けることを示す．また後半では，有限次元単純リー代数に関するワイルの指標公式が，対称化可能なカルタン行列に付随するすべてのカッツ・ムーディ・リー代数（特にアフィン・リー代数）まで拡張されることを示す（ワイル・カッツの指標公式）．

1. 拡大ディンキン図形

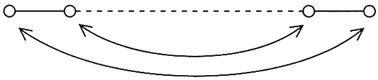
$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を (X_ℓ) 型の有限型カルタン行列とし，その基本ルート・データ $\Phi_A = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ を命題 3.5(ii) のように定める（よって $\mathfrak{h} = \sum_{i\in I} \mathbf{K}h_i, \mathfrak{h}^* = \sum_{i\in I} \mathbf{K}\alpha_i$）．また $\sigma : I \to I$ をディンキン図形のグラフ自己同型写像から定まる 1 対 1 対応とする．すなわち，$\sigma : I \to I$ は全単射で

$$a_{\sigma(i),\sigma(j)} = a_{ij} \qquad (i, j \in I) \tag{4.1}$$

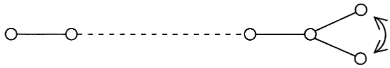
を満たすものとする[1]．$\sigma = \mathrm{id}$ は常に上の条件を満たすが，それ以外の σ が存在するのは，ディンキン図形が自明でない対称性をもつ場合で，以下の 4 種類がある．

(a) (A_ℓ) で $\ell \geqq 2$ のときには位数 2 の自己同型がある．

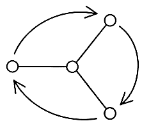
[1] ページ数を節約するために，$\sigma = \mathrm{id}$ のときと $\sigma \neq \mathrm{id}$ のときを同時に取り扱う．まず $\sigma = \mathrm{id}$ のときのみを念頭において（不必要な部分はとばして）第 1，2 節を読み，その後で $\sigma \neq \mathrm{id}$ の場合についてもう一度はじめから読み直すことを，読者にはお勧めする．



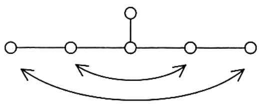
(b) (D_ℓ) で $\ell \geqq 4$ のときには位数 2 の自己同型がある.



(c) (D_4) には位数 3 の自己同型もある.



(d) (E_6) には位数 2 の自己同型がある.



特に σ の位数 r は $1, 2, 3$ のいずれかで，しかも r を決めるとき，σ は本質的に 1 つしかない（D_4 型の場合には位数 2 の σ が 3 つ，位数 3 の σ が 2 つ（互いに他の逆元）あるが，それ以外の場合には本当に 1 つである).

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi_A) = \langle h_i, e_i, f_i \rangle_{i \in I}$ を A から定まるカッツ・ムーディ・リー代数（すなわち (X_ℓ) 型の有限次元単純リー代数）とする．このとき，条件 (4.1) を満たす全単射 $\sigma : I \to I$ から，リー代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$（同じ文字 σ で表すが，混乱の恐れはないであろう）が

$$\sigma(h_i) = h_{\sigma(i)}, \quad \sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \quad \sigma(f_i) = f_{\sigma(i)} \tag{4.2}$$

により定まる．実際，h_i, e_i, f_i を $h_{\sigma(i)}, e_{\sigma(i)}, f_{\sigma(i)}$ で置き換えても同じタイプの基本関係式を満たすことを示せばよいが，これは (4.1) から明らか．また $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の位数は，$\sigma : I \to I$ の位数と同じで，r である.

以下，基礎体 $\mathbf{K}$ は 1 の原始 r 乗根 ζ_r を含むものとし，$m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ に対して，

$$\mathfrak{g}(m) = \{x \in \mathfrak{g} | \sigma(x) = \zeta_r^m x\} \tag{4.3}$$

とおく.

4.1 [注意]　$\zeta_1 = 1, \zeta_2 = -1$ となるので，$\mathbf{K}$ に条件がつくのは，$r=3$ の場合だけである．

4.2 [補題]

(i) $\mathfrak{g} = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} \mathfrak{g}(m)$.

(ii) $[\mathfrak{g}(m), \mathfrak{g}(n)] \subset \mathfrak{g}(m+n) \qquad (m, n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z})$.

証明　(i) $\mathfrak{g}(m)$ は σ の固有空間なので，$\sum_{m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} \mathfrak{g}(m)$ が直和になるのは明らかである．また任意の $x \in \mathfrak{g}$ は

$$x = \sum_{m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} x_m, \qquad x_m = \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} \zeta_r^{-im} \sigma^i(x) \in \mathfrak{g}(m)$$

と分解されるので，主張が成立する．

(ii) σ はリー代数の自己同型写像なので，$x \in \mathfrak{g}(m), y \in \mathfrak{g}(n)$ とすると，

$$\sigma([x,y]) = [\sigma(x), \sigma(y)] = [\zeta_r^m x, \zeta_r^n y] = \zeta_r^{m+n}[x,y]$$

により，$[x,y] \in \mathfrak{g}(m+n)$ が成り立つ．■

補題 4.2(ii) において，$m = n = 0$ の場合および $m = 0$ の場合を考えて次を得る．

4.3 [系]

(i) $\mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー代数である．

(ii) $\mathfrak{g}(m)$ は随伴作用により，$U(\mathfrak{g}(0))$ 加群である．

$\langle \sigma \rangle$ の I への作用の軌道の集合を J と書く．$p \in J$ とすると，

- 任意の $i, j \in p, i \neq j$ に対して $a_{ij} = 0$,
- p は 2 元 i, j からなり $a_{ij} = a_{ji} = -1$

のいずれかが成り立つ．また，後者の場合が起こるのは $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型で $r=2$ の場合のみである．以下，前者が成り立つ場合には，$p\in J$ は**直交条件**（orthogonality condition）を満たすということにする．

$\mathfrak{g}(0)$ の元 $H_p, E_p, F_p (p\in J)$ を

$$H_p=\begin{cases}\sum_{i\in p} h_i & (p\text{ は直交条件を満たす})\\ 2\sum_{i\in p} h_i & (\text{それ以外}),\end{cases} \tag{4.4}$$

$$E_p=\sum_{i\in p} e_i, \tag{4.5}$$

$$F_p=\begin{cases}\sum_{i\in p} f_i & (p\text{ は直交条件を満たす})\\ 2\sum_{i\in p} f_i & (\text{それ以外})\end{cases} \tag{4.6}$$

で定める．このとき $\sigma:\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}$ の固定点集合 $\mathfrak{h}(0)=\mathfrak{g}(0)\cap\mathfrak{h}$ は，$\{H_p\}_{p\in J}$ を基底とする $\mathfrak{h}$ の部分空間である．

$p\in J$ に対して，$\beta_p\in\mathfrak{h}(0)^*$ を

$$\beta_p(h)=\alpha_i(h) \qquad (h\in\mathfrak{h}(0), i\in p) \tag{4.7}$$

により定める．これは $i\in p$ の選び方によらない．実際 $h=\sum_{k\in q} h_k$ $(q\in J)$ としてよいが，このとき

$$\alpha_{\sigma(i)}(h)=\sum_{k\in q}\alpha_{\sigma(i)}(h_k)=\sum_{k\in q}\alpha_i(h_{\sigma^{-1}(k)})=\sum_{k\in q}\alpha_i(h_k)=\alpha_i(h)$$

である．

行列 $B=(b_{pq})_{p,q\in J}$ を

$$b_{pq}=\beta_q(H_p)=\begin{cases}\sum_{i\in p} a_{ij} & (p\text{ は直交条件を満たす})\\ 2\sum_{i\in p} a_{ij} & (\text{それ以外})\end{cases} \tag{4.8}$$

により定める．ただし $j\in q$ とする．

4.4 ［命題］

(i) B は有限型カルタン行列である．

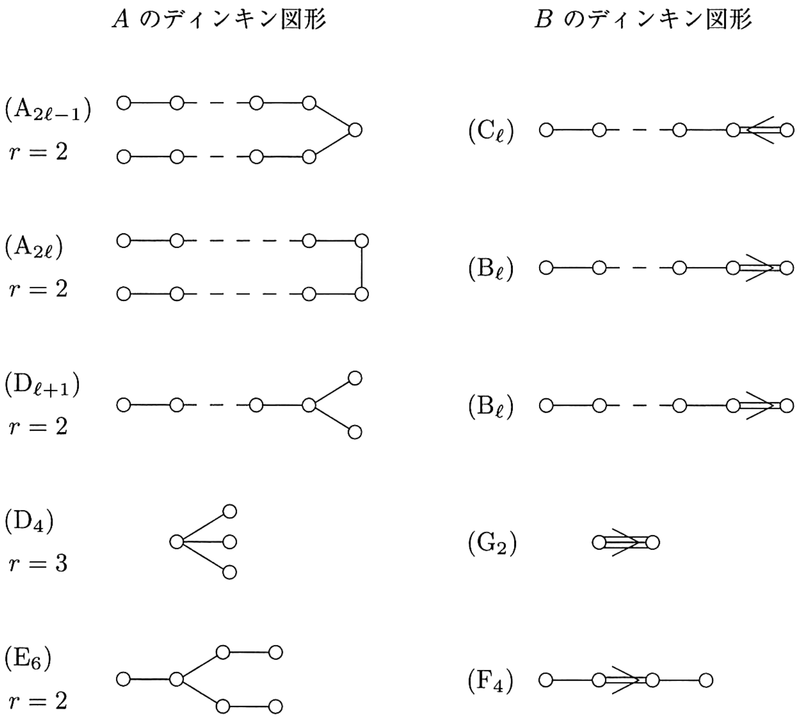


図 4.1　A のディンキン図形と B のディンキン図形

(ii) $(\mathfrak{h}(0), \{H_p\}_{p\in J}, \{\beta_p\}_{p\in J})$ は B をカルタン行列とする基本ルート・データ Φ_B と同型である（命題 3.5 参照）.

証明　$r=1$ のときには $A=B$ となり，明らかである．$r>1$ の場合は，ケース・バイ・ケースの計算で B を求めることにより，主張を示すことができる．詳細は読者に委ねる．　■

$r>1$ の場合，B のディンキン図形は，具体的には図 4.1 のようになる．

4.5 [定理]　B をカルタン行列とする有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_B)$ から $\mathfrak{g}(0)$

への同型写像が,

$$h_p \mapsto H_p, \qquad e_p \mapsto E_p, \qquad f_p \mapsto F_p$$

により定まる.

4.6 [定理]

(i) $n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ に対して，$\mathfrak{g}(n)$ は自明でない既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群である.

(ii) $n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ に対して，$U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 $\mathfrak{g}(n)$ はその双対加群 $\mathfrak{g}(n)^*$ と同型である.

(iii) $m, n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}, m \neq n$ に関して，$U(\mathfrak{g}(0))$ 加群の同型 $\mathfrak{g}(m) \cong \mathfrak{g}(n)$ が成立するのは，$r = 3, m = \pm 1, n = \mp 1$ のときのみである.

定理 4.5，定理 4.6 の証明はやや面倒なので，ここでは略す．証明を知りたい方は付録 A の第 2 節をご覧いただきたい.

以下，混乱を避けるために $U(\mathfrak{h}(0))$ 加群 V に対してウェイト $\mu \in \mathfrak{h}(0)^*$ のウェイト空間を $V_{[\mu]}$ で表す．すなわち

$$V_{[\mu]} = \{v \in V | hv = \mu(h)v \ (h \in \mathfrak{h}(0))\}$$

とする.

既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 $\mathfrak{g}(-1)$ の最高ウェイトを $-\beta_0 \in \mathfrak{h}(0)^*$ とする.

4.7 [命題]　　$-\beta_0 \in \sum_{p \in J} \mathbf{Z}_{\geqq 0} \beta_p \setminus \{0\}$.

証明　$\mathfrak{g}$ の $U(\mathfrak{h})$ 加群としてのウェイトの集合は $\{0\} \cup \Delta$ である．$i \in p \in J$ のとき $\alpha_i | \mathfrak{h}(0) = \beta_p$ となることに注意すると，$\mathfrak{g}$ の $U(\mathfrak{h}(0))$ 加群としてのウェイトの集合は $\sum_{p \in J} \mathbf{Z}\beta_p$ に含まれ，また $\alpha \in \Delta$ ならば $\alpha | \mathfrak{h}(0) \neq 0$ となることがわかる．よって $\mathfrak{g}_{[0]} = \mathfrak{h}$ である．したがって $\mathfrak{g}(-1)$ の $U(\mathfrak{h}(0))$ 加群としてのウェイトの集合も $\sum_{p \in J} \mathbf{Z}\beta_p$ に含まれて，$\mathfrak{g}(-1)_{[0]} = \mathfrak{g}(-1) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ が成り立つ．さらに σ の $\mathfrak{h}$ への作用をよく見ると $\mathfrak{g}(-1) \cap \mathfrak{h} \neq \{0\}$ がわかる．すなわち 0 は $\mathfrak{g}(-1)$ のウェイトである．$-\beta_0$ は $\mathfrak{g}(-1)$ のウェイトのうちで $\mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準半順序に関して最大なものなので，$-\beta_0 \geqq 0$ でなくてはならない．また $\mathfrak{g}(-1)$ は自明でない $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群なので，$\beta_0 \neq 0$ が成り立つ.　∎

$\mathfrak{g}$ 上の非退化標準不変形式 $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{K}$ を 1 つとり固定する．

4.8 [命題]

(i) $\kappa|\mathfrak{g}(0) \times \mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}(0)$ 上の非退化な標準不変形式である．

(ii) $m, n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}, \mu, \nu \in \mathfrak{h}(0)^*$ とする．$m+n \neq 0$ あるいは $\mu+\nu \neq 0$ ならば，$\kappa(\mathfrak{g}(m)_{[\mu]}, \mathfrak{g}(n)_{[\nu]}) = 0$ である．

(iii) $m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}, \mu \in \mathfrak{h}(0)^*$ のとき，κ の $\mathfrak{g}(m)_{[\mu]} \times \mathfrak{g}(-m)_{[-\mu]}$ への制限は非退化である．

証明　(i) $\kappa|\mathfrak{g}(0) \times \mathfrak{g}(0)$ が $\mathfrak{g}(0)$ 上の不変形式であることは明らかである．κ の $\sum_{i\in I} \mathbf{Q}h_i$ への制限は正定値なので，さらに $\sum_{p\in J} \mathbf{Q}H_p$ に制限しても正定値である．よって $\kappa|\mathfrak{g}(0) \times \mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}(0)$ 上の標準不変形式である．注意 3.29 により，$\kappa|\mathfrak{g}(0) \times \mathfrak{g}(0)$ は $\mathfrak{g}(0)$ のキリング形式の定数倍なので，非退化である．

(ii) $x \in \mathfrak{g}(m)_{[\mu]}, y \in \mathfrak{g}(n)_{[\nu]}$ とする．$\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ はリー代数 $\mathfrak{g}$ の同型写像なので，キリング形式の定義により

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(x, y) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\sigma x, \sigma y) = \zeta_r^{m+n} \kappa_{\mathfrak{g}}(x, y)$$

が成り立つ．注意 3.29 により κ は $\kappa_{\mathfrak{g}}$ の定数倍なので，やはり $\kappa(x, y) = \zeta_r^{m+n}\kappa(x, y)$ が成り立つ．したがって $m+n \neq 0$ すなわち $\zeta_r^{m+n} \neq 1$ ならば $\kappa(x, y) = 0$ である．また $h \in \mathfrak{h}(0)$ に対して

$$0 = \kappa([h, x], y) + \kappa(x, [h, y]) = (\mu+\nu)(h)\kappa(x, y)$$

である．したがって $\mu \neq -\nu$ ならば $\kappa(x, y) = 0$ である．

(iii) κ は非退化なので (ii) から明らかである．∎

$\mathfrak{g}(0)$ 上の標準不変形式 $\kappa|\mathfrak{g}(0) \times \mathfrak{g}(0)$ から定まる $\mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準形式を

$$(\ ,\ ) : \mathfrak{h}(0)^* \times \mathfrak{h}(0)^* \to \mathbf{K} \tag{4.9}$$

で表す．また $\mu \in \mathfrak{h}(0)^*$ に対して $t_\mu \in \mathfrak{h}(0)$ を

$$\kappa(t_\mu, h) = \mu(h) \qquad (h \in \mathfrak{h}(0))$$

により定める．

4.9 [補題]　$m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}, \mu \in \mathfrak{h}(0)^*$ のとき，$x \in \mathfrak{g}(m)_{[\mu]}, y \in \mathfrak{g}(-m)_{[-\mu]}$ に対して $[x,y] = \kappa(x,y)t_\mu$ が成立する．

証明　$h \in \mathfrak{h}(0)$ に対して

$$\kappa(h,[x,y]) = \kappa([h,x],y) = \mu(h)\kappa(x,y) = \kappa(h,\kappa(x,y)t_\mu)$$

となるので，主張は明らか．■

$-\beta_0$ は既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 $\mathfrak{g}(-1)$ の最高ウェイトなので，$\dim \mathfrak{g}(-1)_{[-\beta_0]} = 1$ である．したがって命題 4.8(iii) により，$\dim \mathfrak{g}(1)_{[\beta_0]} = 1$ で，しかも κ の $\mathfrak{g}(1)_{[\beta_0]} \times \mathfrak{g}(-1)_{[-\beta_0]}$ への制限は非退化である．よって補題 4.9 により，

$$[\mathfrak{g}(1)_{[\beta_0]}, \mathfrak{g}(-1)_{[-\beta_0]}] = \mathbf{K}t_{\beta_0}$$

が成り立つ．そこで，$H_0 \in \mathfrak{h}(0), E_0 \in \mathfrak{g}(1)_{[\beta_0]}, F_0 \in \mathfrak{g}(-1)_{[-\beta_0]}$ を

$$H_0 = \frac{2t_{\beta_0}}{(\beta_0,\beta_0)}, \qquad [E_0,F_0] = H_0$$

により定める（H_0 は一意的に定まる．E_0, F_0 は定数倍を除いて一意的に定まる）．

次は，定義から明らか．

4.10 [命題]　H_0, E_0, F_0 に関して次の関係式が成立する．

$$[E_0,F_0] = H_0, \quad [H_0,E_0] = 2E_0, \quad [H_0,F_0] = -2F_0.$$

以下の事実が後で必要となる．

4.11 [命題]　$m, n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ のとき $[\mathfrak{g}(m),\mathfrak{g}(n)] = \mathfrak{g}(m+n)$ が成り立つ．

証明　$[\mathfrak{g}(m),\mathfrak{g}(n)]$ は既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 $\mathfrak{g}(m+n)$ の部分加群なので，$[\mathfrak{g}(m),\mathfrak{g}(n)] \neq \{0\}$ を示せばよい．命題 4.7 により，$\mathfrak{g}(n)$ は自明でない $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群なので，任意の n について $[\mathfrak{g}(n),\mathfrak{g}(0)] = [\mathfrak{g}(0),\mathfrak{g}(n)] \neq \{0\}$ が成立する．また $[E_0,F_0] = H_0 \neq 0$ により $[\mathfrak{g}(1),\mathfrak{g}(-1)] = [\mathfrak{g}(-1),\mathfrak{g}(1)] \neq \{0\}$ である．残るのは $r=3$（したがってカルタン行列 A が (D_4) 型）のときに

$$[\mathfrak{g}(1),\mathfrak{g}(1)] \neq \{0\}, \qquad [\mathfrak{g}(-1),\mathfrak{g}(-1)] \neq \{0\}$$

を示すことだけである．この場合，I の番号づけを，

$$I=\{1,2,3,4\},\qquad \sigma(2)=2,\quad \sigma(1)=3,\quad \sigma(3)=4,\quad \sigma(4)=1$$

となるようにとる．このとき

$$x_\pm=e_1+\zeta_3^{\mp1}e_3+\zeta_3^{\mp2}e_4\in\mathfrak{g}(\pm1),\qquad y_\pm=f_1+\zeta_3^{\mp1}f_3+\zeta_3^{\mp2}f_4\in\mathfrak{g}(\pm1)$$

に関して $[x_\pm,y_\pm]=h_1+\zeta_3^{\pm1}h_3+\zeta_3^{\pm2}h_4\neq0$ となり，主張が確かめられる．

∎

$\tilde{J}=\{0\}\sqcup J$ とし，行列 $\tilde{B}$ を

$$\tilde{B}=(b_{pq})_{p,q\in\tilde{J}},\qquad b_{pq}=\beta_q(H_p) \tag{4.10}$$

により定める．

4.12 ［命題］

(i) $\tilde{B}$ は既約な対称化可能カルタン行列である．

(ii) B に付随する $\mathbf{K}$ 上の基本ルート・データを $(E,\{\beta_p\}_{p\in J},(\ ,\ ))$ とする．$\tilde{E}=E\oplus\mathbf{K}\delta$ とおき，$\{\tilde{\beta}_p\}_{p\in\tilde{J}}\subset\tilde{E}$ を，$\tilde{\beta}_0=\beta_0+\delta,\tilde{\beta}_p=\beta_p\ (p\in J)$ により定める．また，E 上の標準形式 $(\ ,\ )$ を用いて，$\tilde{E}$ 上の対称双線形形式 $(\ ,\ )$ を

$$(x_1+c_1\delta,x_2+c_2\delta)=(x_1,x_2)\qquad (x_1,x_2\in E,c_1,c_2\in\mathbf{K})$$

で定める．このとき，$(\tilde{E},\{\tilde{\beta}_p\}_{p\in\tilde{J}},(\ ,\ ))$ は $\tilde{B}$ に付随する基本ルート系である．

(iii) $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ のとき，標準形式 $(\ ,\ ):\tilde{E}\times\tilde{E}\to\mathbf{R}$ は正値で，しかも正定値ではない．

4.13 ［注意］　一般に $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 V 上の対称双線形形式 $(\ ,\ )$ であって，任意の $v\in V$ に対して $(v,v)\geqq0$ となるもののことを**正値対称双線形形式**（positive symmetric bilinear form）と呼ぶ．またさらに $(v,v)=0\Rightarrow v=0$ が成り立つとき，$(\ ,\ )$ は**正定値**（positive definite）であるという．

命題 4.12 の証明　(i) $q \in \tilde{J}$ とする．$E_q \in \mathfrak{g}_{[\beta_q]}$ なので，$[H_p, E_q] = \beta_q(H_p)E_q$ $(p \in \tilde{J})$ である．$\mathfrak{a}_p = \mathbf{K}H_p + \mathbf{K}E_p + \mathbf{K}F_p$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ と同型な $\mathfrak{g}$ の部分リー代数をなし，随伴作用により $\mathfrak{g}$ は有限次元 $U(\mathfrak{a}_p)$ 加群となるので，$\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の表現論を用いて，$b_{pq} = \beta_q(H_p) \in \mathbf{Z}$ がわかる．また $-\beta_0$ は有限次元既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 $\mathfrak{g}(-1)$ の最高ウェイトなので，任意の $p \in J$ に対して $-\beta_0(H_p) \geqq 0$，すなわち $\beta_0(H_p) \leqq 0$ が成り立つ．さらに H_0 の定義と補題 3.35 により $H_p = 2t_{\beta_p}/(\beta_p, \beta_p)$ $(p \in \tilde{J})$ である．よって $b_{pq} = \beta_q(H_p) = 2(\beta_p, \beta_q)/(\beta_p, \beta_p)$ $(p, q \in \tilde{J})$ となり，$d_p = (\beta_p, \beta_p)$ に関して $d_p b_{pq} = d_q b_{qp}$ が成立する．$B = (b_{pq})_{p,q \in J}$ がカルタン行列になることは既にわかっているので，以上の議論から $\tilde{B}$ が対称化可能なカルタン行列であることが従う．

次に $\tilde{B}$ が既約であることを示そう．B が既約であることは既にわかっているので，B のディンキン図形は連結である．したがって B のディンキン図形の頂点であって，0 に対応する頂点と線分で結ばれるものが存在することを示せばよい．すなわち $\beta_0(H_p) \neq 0$ となる $p \in J$ が存在することを示せばよい．任意の $p \in J$ に対して $\beta_0(H_p) = 0$ であるとすると，$\{H_p\}_{p \in J}$ が $\mathfrak{h}(0)$ の基底であることから $\beta_0 = 0$ となってしまうが，これは命題 4.7 に矛盾する．よって $\tilde{B}$ は既約である．

(ii) $d_p = (\beta_p, \beta_p)/2 \in \mathbf{Q}_{>0} (p \in \tilde{J})$ に関して，

$$(\tilde{\beta}_p, \tilde{\beta}_q) = (\beta_p, \beta_q) = d_p b_{pq} \qquad (p, q \in \tilde{J})$$

となるので，主張は明らか．

(iii) B は有限型カルタン行列なので，$(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbf{R}$ は正定値である．よって主張は $(\ ,\ ) : \tilde{E} \times \tilde{E} \to \mathbf{R}$ の定義から明らか．　■

(4.10) の $\tilde{B}$ を $(\mathrm{X}_\ell^{(r)})$ 型カルタン行列と呼ぶ．またそのディンキン図形を $(\mathrm{X}_\ell^{(r)})$ 型の**拡大ディンキン図形** (extended Dynkin diagram) と呼び，それは図 4.2 により与えられる（ただし図 4.2 は図 3.1 の簡易表示を用いて描かれている）．

4.14 [定義]　A' を既約な対称化可能カルタン行列とする．付随する $\mathbf{R}$ 上の基本ルート系において，その標準形式が正値ではあるが正定値ではないときに，A' を**アフィン型カルタン行列** (Cartan matrix of affine type) と呼ぶ．

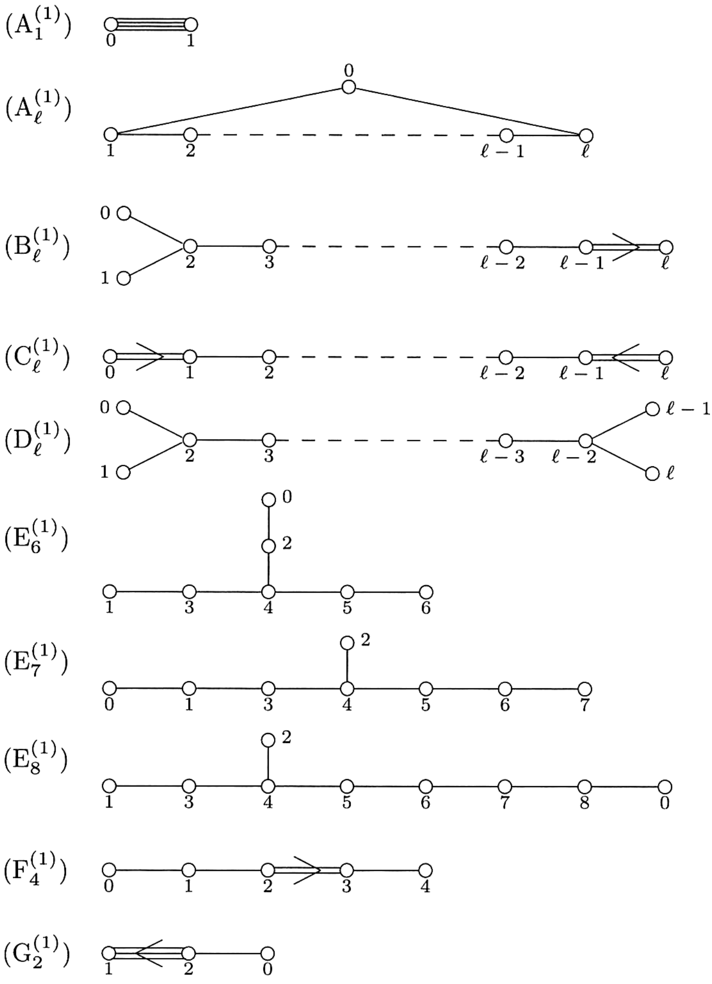


図 4.2　アフィン型カルタン行列のディンキン図形

実は次が成り立っている.

4.15 [定理]　対称化可能カルタン行列がアフィン型であるための必要十分条件は, そのディンキン図形が図 4.2 のいずれかの図形と一致することである).

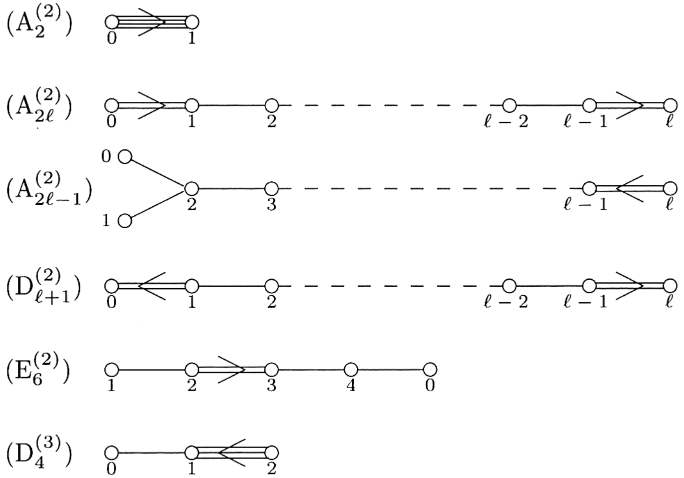


図 4.2　アフィン型カルタン行列のディンキン図形（続き）

証明は付録 A の第 1 節を参照されたい．

なお，定理 4.15 と付録 A の第 2 節の結果を用いれば，$(X_\ell^{(r)})$ 型の拡大ディンキン図形が図 4.2 の $(X_\ell^{(r)})$ の欄に描かれたものであることは，次のようにして示される．

$X = A, B, C, D$ の場合には，$\mathfrak{g}$ のルート系の具体的記述（第 3 章 2 節）と命題 A.11 を用いて，β_0 が具体的に求まり，これから $(X_\ell^{(r)})$ 型の拡大ディンキン図形が得られる．以下，残りの $X = E, F, G$ の場合のみ考える．

まず $r = 1$ の場合を考える．$\mathfrak{g}$ のルートがすべて同じ長さをもつ場合には，β_0 も（ルートなので）同じ長さをもつ．図 4.2 にリストアップされた図形のうちで，ルートの長さが 1 種類しかなく，さらに頂点を 1 つ取り除くと $B(= A)$ のディンキン図形となるのは，$(X_\ell^{(r)})$ の欄に描かれたものだけであり，それが $\tilde{B}$ のディンキン図形を与える．$\mathfrak{g}$ のルートが 2 種類の長さをもつとすると，系 A.12 により β_0 は長ルートである．図 4.2 にリストアップされた図形のうちで，長ルートに対応する頂点を 1 つ取り除くと $B(= A)$ のディンキン図形となるのは，$(X_\ell^{(r)})$ の欄に描かれたものだけであり，それが $\tilde{B}$ のディンキン図形を与える．

次に $r>1$ とする．命題 A.11 により β_0 は短ルートである．図 4.2 にリストアップされた図形のうちで，2 種類の長さのルートを含み，短ルートに対応する頂点を 1 つ取り除くと B のディンキン図形となるのは，$(\mathrm{X}_\ell^{(r)})$ の欄に描かれたものだけであり，それが $\tilde{B}$ のディンキン図形を与える（なお，いま用いた論法は，$\mathrm{X}=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}$ の場合にも，いくつかの例外を除いて通用する）．

2. アフィン・リー代数

前節の記号をそのまま用いる．

$\mathbf{K}$ 上の無限次元ベクトル空間 $\hat{\mathfrak{g}}$ を

$$\hat{\mathfrak{g}}=\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}t^n\mathfrak{g}(\overline{n})\right)\oplus\mathbf{K}c\oplus\mathbf{K}d \tag{4.11}$$

により定める．ただし $\overline{n}=n \bmod r\mathbf{Z}\in\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ である．また $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}t^n\mathfrak{g}(\overline{n})$ は $\mathbf{K}[t,t^{-1}]\otimes_{\mathbf{K}}\mathfrak{g}=\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}t^n\mathfrak{g}$ の部分空間と思う．このとき，$\hat{\mathfrak{g}}$ 上にリー代数の構造が，次の関係式で一意的に定まることが容易にわかる．

$$\begin{aligned}
&[t^nx,t^my]=t^{n+m}[x,y]+n\delta_{m+n,0}\kappa(x,y)c\\
&\qquad\qquad(n,m\in\mathbf{Z},x\in\mathfrak{g}(\overline{n}),y\in\mathfrak{g}(\overline{m})),\\
&[c,t^nx]=0\qquad(n\in\mathbf{Z},x\in\mathfrak{g}(\overline{n})),\\
&[c,d]=0,\\
&[d,t^nx]=nt^nx\qquad(n\in\mathbf{Z},x\in\mathfrak{g}(\overline{n})).
\end{aligned}$$

この $\hat{\mathfrak{g}}$ を $(\mathrm{X}_\ell^{(\mathrm{r})})$ 型の**アフィン・リー代数**（affine Lie algebra）と呼ぶ．

$\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数 $\hat{\mathfrak{g}}'$ が

$$\hat{\mathfrak{g}}'=\left(\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}t^n\mathfrak{g}(\overline{n})\right)\oplus\mathbf{K}c \tag{4.12}$$

により定まる．c はリー代数 $\hat{\mathfrak{g}}'$ の中心に属するので，$\mathbf{K}c$ は $\hat{\mathfrak{g}}'$ のイデアルであり，商リー代数 $\hat{\mathfrak{g}}'/\mathbf{K}c$ を考えることができる．$\hat{\mathfrak{g}}'/\mathbf{K}c$ は，ベクトル空間としては $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}t^n\mathfrak{g}(\overline{n})$ と自然に同一視することができるが，この同一視のもとで $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}}t^n\mathfrak{g}(\overline{n})=\hat{\mathfrak{g}}'/\mathbf{K}c$ のブラケット積は，

$$[t^nx,t^my]=t^{n+m}[x,y]\qquad(n,m\in\mathbf{Z},x\in\mathfrak{g}(\overline{n}),y\in\mathfrak{g}(\overline{m}))$$

により与えられる．このブラケット積に関して $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} t^n\mathfrak{g}(\overline{n})$ をリー代数と見たものを**ループ代数** (loop algebra) と呼び，$^L\mathfrak{g}$ で表す．$\hat{\mathfrak{g}}'$ から $^L\mathfrak{g}$ への自然な全射準同型写像に関して，その核は $\hat{\mathfrak{g}}'$ の中心に含まれる．(すなわち $\hat{\mathfrak{g}}'$ は $^L\mathfrak{g}$ の中心拡大である)．

ベクトル空間としての自然な埋め込み $^L\mathfrak{g} \to \hat{\mathfrak{g}}$ はリー代数の準同型写像にはなっていないが，埋め込み $\mathfrak{g}(\overline{0}) \to \hat{\mathfrak{g}}$ はリー代数の準同型写像である．これにより $\mathfrak{g}(\overline{0})$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数と見なす．また $\hat{\mathfrak{g}}$ の随伴作用を制限することにより，$t^n\mathfrak{g}(\overline{n})$ は $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群であるが，これは $\mathfrak{g}(\overline{n})$ と自然に同型である．

本節の目標は，$\hat{\mathfrak{g}}$ が $\tilde{B}$ をカルタン行列とするカッツ・ムーディ・リー代数であることを示すことである．

$\hat{\mathfrak{g}}$ の部分空間 $\hat{\mathfrak{h}}$ を

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}(\overline{0}) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d \tag{4.13}$$

により定める．これは $\hat{\mathfrak{g}}$ の可換な部分リー代数である．以下，$\lambda \in \mathfrak{h}(0)^*$ は $\lambda(c) = \lambda(d) = 0$ により，$\hat{\mathfrak{h}}^*$ の元と見なす．$\delta \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を，

$$\delta(\mathfrak{h}(0)) = \{0\}, \delta(c) = 0, \delta(d) = 1$$

により定める．また $\{\hat{H}_p\}_{p\in\tilde{J}} \subset \hat{\mathfrak{h}}, \{\hat{\beta}_p\}_{p\in\tilde{J}} \subset \hat{\mathfrak{h}}^*$ を

$$\hat{H}_p = \begin{cases} H_p & (p \in J) \\ H_0 + \frac{2}{(\beta_0,\beta_0)}c & (p = 0), \end{cases} \qquad \hat{\beta}_p = \begin{cases} \beta_p & (p \in J) \\ \beta_0 + \delta & (p = 0) \end{cases}$$

により定める．

このとき，次は容易に確かめられる．

4.16 [命題]　$\Phi_{\tilde{B}} = (\hat{\mathfrak{h}}, \{\hat{H}_p\}_{p\in\tilde{J}}, \{\hat{\beta}_p\}_{p\in\tilde{J}})$ は $\tilde{B}$ をカルタン行列にもつ基本ルート・データである．

$x \in t^n\mathfrak{g}(\overline{n})_{[\beta]}, h \in \hat{\mathfrak{h}}$ に対して $[h,x] = (\beta + n\delta)(h)x$ が成り立つので，$\hat{\mathfrak{g}}$ の $U(\hat{\mathfrak{h}})$ 加群としてのウェイト空間分解は，

$$\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z},\beta\in\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n}))} \hat{\mathfrak{g}}_{\beta+n\delta}, \qquad \hat{\mathfrak{g}}_{\beta+n\delta} = \begin{cases} t^n\mathfrak{g}(\overline{n})_{[\beta]} & (\beta + n\delta \neq 0) \\ \hat{\mathfrak{h}} & (\beta + n\delta = 0) \end{cases}$$

により与えられる．ここで $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n}))$ は $U(\mathfrak{h}(0))$ 加群 $\mathfrak{g}(\overline{n})$ のウェイトの集合である．

$p \in \tilde{J}$ に対して $\hat{E}_p, \hat{F}_p \in \hat{\mathfrak{g}}$ を

$$\hat{E}_p = \begin{cases} E_p & (p \in J) \\ tE_0 & (p = 0), \end{cases} \qquad \hat{F}_p = \begin{cases} F_p & (p \in J) \\ t^{-1}F_0 & (p = 0), \end{cases}$$

により定める．

4.17［定理］　リー代数の同型写像 $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}}) \to \hat{\mathfrak{g}}$ が，

$$h \mapsto h \quad (h \in \hat{\mathfrak{h}}), \qquad e_p \mapsto \hat{E}_p \quad (p \in \tilde{J}), \qquad f_p \mapsto \hat{F}_p \quad (p \in \tilde{J})$$

により定まる．

証明　まず (2.2),...,(2.7) に対応する関係式が成立していることを見よう．これまでの議論から自明でないのは，$[\hat{E}_0, \hat{F}_p] = [\hat{E}_p, \hat{F}_0] = 0$ $(p \in J)$ のみであり，これは $[E_0, F_p] = [E_p, F_0] = 0$ と同値である．$-\beta_0$ は既約 $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群 $\mathfrak{g}(-\overline{1})$ の最高ウェイトなので，$p \in J$ に対して $\mathfrak{g}(-\overline{1})_{[-\beta_0+\beta_p]} = \{0\}$ が成り立つ．したがって命題 4.8(iii) により，$\mathfrak{g}(\overline{1})_{[\beta_0-\beta_p]} = \{0\}$ もわかる．このとき，

$$[E_p, F_0] \in \mathfrak{g}(-\overline{1})_{[-\beta_0+\beta_p]} = \{0\}, \qquad [F_p, E_0] \in \mathfrak{g}(\overline{1})_{[\beta_0-\beta_p]} = \{0\}$$

となり，求める関係式が得られる．

次に，$\hat{\mathfrak{g}}$ が $\hat{\mathfrak{h}} \cup \{\hat{E}_p, \hat{F}_p\}_{p \in \tilde{J}}$ により生成されることを見よう．$\hat{\mathfrak{h}} \cup \{\hat{E}_p, \hat{F}_p\}_{p \in \tilde{J}}$ により生成される $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数を $\mathfrak{a}$ とする．$\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数 $\mathfrak{g}(\overline{0})$ は $\mathfrak{h}(\overline{0}) \cup \{\hat{E}_p, \hat{F}_p\}_{p \in J}$ により生成されるので，$\mathfrak{a} \supset \mathfrak{g}(\overline{0})$ である．また $t^{\pm 1}\mathfrak{g}(\pm\overline{1}) \cap \mathfrak{a}$ は 0 でない元 x($\hat{E}_0$ あるいは $\hat{F}_0$）を含むが，$t^{\pm 1}\mathfrak{g}(\pm\overline{1})$ は $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群としては $\mathfrak{g}(\pm\overline{1})$ と同型で既約なので，

$$\mathfrak{a} \supset \mathrm{ad}(U(\mathfrak{g}(\overline{0})))(x) = t^{\pm 1}\mathfrak{g}(\pm\overline{1})$$

となる．以上により

$$\mathfrak{a} \supset t^{-1}\mathfrak{g}(-\overline{1}) \oplus \mathfrak{g}(\overline{0}) \oplus t\mathfrak{g}(\overline{1}) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$$

が示された．$\mathfrak{a} \supset t^{\pm n}\mathfrak{g}(\overline{\pm n})$ が $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ について成立しているとすると，命題 4.11 により，

$$t^{\pm(n+1)}\mathfrak{g}(\overline{\pm(n+1)}) = t^{\pm(n+1)}[\mathfrak{g}(\pm\overline{n}), \mathfrak{g}(\pm\overline{1})] = [t^{\pm n}\mathfrak{g}(\pm\overline{n}), t^{\pm 1}\mathfrak{g}(\pm\overline{1})] \subset \mathfrak{a}$$

となるので，任意の $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ について $\mathfrak{a} \supset t^{\pm n}\mathfrak{g}(\overline{\pm n})$ が成立する．よって $\hat{\mathfrak{g}}$ は $\hat{\mathfrak{h}} \cup \{\hat{E}_p, \hat{F}_p\}_{p\in\tilde{J}}$ により生成される．

以上により，リー代数の全射準同型写像 $F : \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_{\tilde{B}}) \to \hat{\mathfrak{g}}$ が，

$$F(h) = h \quad (h \in \hat{\mathfrak{h}}), \qquad F(\tilde{e}_p) = \hat{E}_p \quad (p \in \tilde{J}), \qquad F(\tilde{f}_p) = \hat{F}_p \quad (p \in \tilde{J})$$

により定まることがわかった．$\mathrm{Ker}(F)$ は $\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_{\tilde{B}})$ のイデアルで，$\mathrm{Ker}(F) \cap \hat{\mathfrak{h}} = \{0\}$ を満たすので，$\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ の定義と準同型定理により，リー代数の全射準同型写像 $G : \hat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ が，

$$G(h) = h \quad (h \in \hat{\mathfrak{h}}), \qquad G(\hat{E}_p) = e_p \quad (p \in \tilde{J}), \qquad G(\hat{F}_p) = f_p \quad (p \in \tilde{J})$$

により定まる．このとき G が単射であることを示せばよい．$\mathfrak{b} = \mathrm{Ker}(G)$ とおく．$\mathfrak{b}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ のイデアルで，$\mathfrak{b} \cap \hat{\mathfrak{h}} = \{0\}$ を満たす．$\mathfrak{b}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分 $U(\hat{\mathfrak{h}})$ 加群なので，

$$\mathfrak{b} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}, \beta\in\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n}))} (\hat{\mathfrak{g}}_{\beta+n\delta} \cap \mathfrak{b})$$

が成り立つ．$\mathfrak{b} \neq \{0\}$ と仮定すると，$\mathfrak{b}\cap\hat{\mathfrak{h}} = \{0\}$ なので，$n \in \mathbf{Z}, \beta \in \mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n}))$ であって $\beta+n\delta \neq 0, t^n\mathfrak{g}(\overline{n})_{[\beta]}\cap\mathfrak{b} \neq \{0\}$ となるものが存在する．$x \in \mathfrak{g}(\overline{n})_{[\beta]}\setminus\{0\}$ であって，$t^n x \in \mathfrak{b}$ となるものをとる．命題 4.8 により，$y \in \mathfrak{g}(-\overline{n})_{[-\beta]}$ であって，$\kappa(x, y) = 1$ を満たすものがとれる．このとき補題 4.9 により，$\mathfrak{b} \ni [t^n x, t^{-n} y] = t_\beta + nc$ となる．$\beta \neq 0$ または $n \neq 0$ なので，$t_\beta + nc \in \hat{\mathfrak{h}} \setminus \{0\}$ であるが，これは $\mathfrak{b} \cap \hat{\mathfrak{h}} = \{0\}$ に矛盾する．したがって $\mathrm{Ker}(G) = \mathfrak{b} = \{0\}$ となり，G の単射性が示された． ∎

$\hat{\mathfrak{h}}^*$ の部分空間 $\tilde{E}$ を

$$\tilde{E} = \sum_{p\in\tilde{J}} \mathbf{K}\hat{\beta}_p = \mathfrak{h}(0)^* \oplus \mathbf{K}\delta \tag{4.14}$$

に定める．また，$\mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準形式 (4.9) を用いて，$\tilde{E}$ 上の対称双線形形式を

$$(\mu_1 + c_1\delta, \mu_2 + c_2\delta) = (\mu_1, \mu_2) \qquad (\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{h}(0)^*, c_1, c_2 \in \mathbf{K}) \tag{4.15}$$

により定める．命題 4.12 により，$(\tilde{E}, \{\hat{\beta}_p\}_{p\in\tilde{J}}, (\ ,\ ))$ は，カルタン行列 $\tilde{B}$ に付随する基本ルート系である．

$\hat{\mathfrak{g}}$ 上の対称双線形形式 $\hat{\kappa} : \hat{\mathfrak{g}} \times \hat{\mathfrak{g}} \to \mathbf{K}$ を

$$\hat{\kappa}(t^n u, t^m v) = \delta_{n+m,0}\kappa(u,v) \qquad (u \in \mathfrak{g}(\overline{n}), v \in \mathfrak{g}(\overline{m})),$$

$$\hat{\kappa}(t^n u, c) = \hat{\kappa}(t^n u, d) = 0 \qquad (u \in \mathfrak{g}(\overline{n})),$$

$$\hat{\kappa}(c,c) = \hat{\kappa}(d,d) = 0, \qquad \hat{\kappa}(c,d) = 1$$

により定める．

4.18［命題］　$\hat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ と同一視するとき，$\hat{\kappa}$ は $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ 上の非退化な標準不変形式である．

証明　整数 n に対して $\hat{\mathfrak{g}}(n) = t^n\mathfrak{g}(\overline{n})$ $(n \neq 0)$，$\hat{\mathfrak{g}}(0) = \mathfrak{g}(\overline{0}) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$ とおく．このとき

$$\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \hat{\mathfrak{g}}(n), \qquad [\hat{\mathfrak{g}}(n), \hat{\mathfrak{g}}(m)] \subset \hat{\mathfrak{g}}(m+n),$$

$$\hat{\kappa}(\hat{\mathfrak{g}}(n), \hat{\mathfrak{g}}(m)) = \{0\} \qquad (n+m \neq 0)$$

が成り立っている．

まず $\hat{\kappa}$ が不変形式であることを示そう．$x, y, z \in \hat{\mathfrak{g}}$ に対して

$$\hat{\kappa}([x,y],z) = \hat{\kappa}(x,[y,z])$$

を示せばよい．$x \in \hat{\mathfrak{g}}(\ell), y \in \hat{\mathfrak{g}}(m), z \in \hat{\mathfrak{g}}(n)$ としてよい．$\ell + m + n \neq 0$ ならば両辺は 0 になるので，$\ell + m + n = 0$ としてよい．c は $\hat{\mathfrak{g}}$ の中心に属するので，$m = 0$ で $y = c$ のときには両辺が 0 になる．また $\ell = 0$ で $x = c$ のとき，および $n = 0$ で $z = c$ のときにも，$[\hat{\mathfrak{g}}(p), \hat{\mathfrak{g}}(-p)] \subset \mathfrak{g}(\overline{0}) \oplus \mathbf{K}c$ から両辺が 0 になることが容易にわかる．$m = 0$ で $y = d$ のときは，両辺は $n\hat{\kappa}(x,z)$ となって一致する．$\ell = 0$ で $x = d$ とする．$m = 0$ ならば，$[d,y] = 0$ により左辺は 0 で，$[y,z] \in [\hat{\mathfrak{g}}(0), \hat{\mathfrak{g}}(0)] \subset \mathfrak{g}(\overline{0})$ により，右辺も 0 になる．$m \neq 0$ のときは $y = t^m u, z = t^{-m} v$ と書けるが，このとき両辺がともに $m\kappa(u,v)$ となりやはり一致する．全く同様に $n = 0$ で $x = d$ のときも両辺が一致することがわかる．以上により，$x = t^\ell u, y = t^m v, z = t^n w$ の場合を考えればよい．このとき

左辺は $\kappa([u,v],w)$，右辺は $\kappa(u,[v,w])$ となるので κ の不変性から両辺が一致することがわかる．$\hat{\kappa}$ が不変形式であることが示された．

次に $\hat{\kappa}$ が非退化であることを示そう．それには $n \neq 0$ に対する $\hat{\kappa}|\hat{\mathfrak{g}}(n) \times \hat{\mathfrak{g}}(-n)$ と $\hat{\kappa}|\hat{\mathfrak{g}}(0) \times \hat{\mathfrak{g}}(0)$ が共に非退化であることを示せばよい．$n \neq 0$ に対する $\hat{\kappa}|\hat{\mathfrak{g}}(n) \times \hat{\mathfrak{g}}(-n)$ の非退化性は，命題4.8により明らかである．$u \in \mathfrak{g}(\overline{0}), a, b \in \mathbf{K}$ に対して $\hat{\kappa}(u + ac + bd, \hat{\mathfrak{g}}(0)) = \{0\}$ が成り立つとする．$\kappa|\mathfrak{g}(\overline{0}) \times \mathfrak{g}(\overline{0})$ の非退化性により，$u = 0$ である．また $\hat{\kappa}(c,c) = \hat{\kappa}(d,d) = 0, \hat{\kappa}(c,d) = 1$ から $a = b = 0$ も従う．以上により，$\hat{\kappa}$ が非退化であることが示された．

$\hat{\kappa}$ の $\hat{\mathfrak{h}}$ への制限は，

$$\begin{aligned} &\hat{\kappa}(h,h') = \kappa(h,h') \qquad (h,h' \in \mathfrak{h}(\overline{0})), \\ &\hat{\kappa}(h,c) = \hat{\kappa}(h,d) = 0 \qquad (h \in \mathfrak{h}(\overline{0})), \\ &\hat{\kappa}(c,c) = \hat{\kappa}(d,d) = 0, \qquad \hat{\kappa}(c,d) = 1 \end{aligned}$$

で与えられる．$\lambda \in \mathfrak{h}(\overline{0})^*$ に対して $t_\lambda \in \mathfrak{h}(\overline{0})$ を $\kappa(t_\lambda, h) = \lambda(h)$ $(h \in \mathfrak{h}(\overline{0}))$ により定める．このとき，任意の $h \in \mathfrak{h}(\overline{0}) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$ に対して $\hat{\kappa}(t_\lambda, h) = \lambda(h), \hat{\kappa}(c,h) = \delta(h)$ が成立している．したがって $\hat{\kappa}$ から定まる $\hat{\mathfrak{h}}^*$ 上の対称双線形形式の $\tilde{E} = \mathfrak{h}(\overline{0})^* \oplus \mathbf{K}\delta$ への制限は，

$$(\lambda + a\delta, \mu + b\delta) = \hat{\kappa}(t_\lambda + ac, t_\mu + bc) = \kappa(t_\lambda, t_\mu) = (\lambda, \mu) \qquad (\lambda, \mu \in \mathfrak{h}(\overline{0})^*)$$

により与えられる（最後の (λ, μ) は κ から定まる $\mathfrak{h}(\overline{0})^*$ 上の対称双線形形式に関するものである）．先に見たようにこれは，$\tilde{E}$ 上の標準形式となっている． ∎

4.19 [命題] カッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ および $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ において，そのルートの集合 $\hat{\Delta}$，正ルートの集合 $\hat{\Delta}^+$，実ルートの集合 $\hat{\Delta}_{\mathrm{re}}$ および虚ルートの集合 $\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}$ は，ともに

$$\hat{\Delta} = (\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{0})) \setminus \{0\}) \cup (\bigcup_{n \neq 0} (\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n})) + n\delta)), \tag{4.16}$$

$$\hat{\Delta}^+ = ((\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{0})) \cap \sum_{p \in J} \mathbf{Z}_{\geqq 0}\beta_p) \setminus \{0\}) \cup (\bigcup_{n > 0} (\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n})) + n\delta)), \tag{4.17}$$

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{re}} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} ((\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n})) \setminus \{0\}) + n\delta), \tag{4.18}$$

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{im}} = \{n\delta | n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}, \tag{4.19}$$

で与えられる．

証明　まず，$\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ において (4.16) が成り立つことは，定理 4.17 と $\hat{\mathfrak{g}}$ の $U(\hat{\mathfrak{h}})$ 加群としてのウェイト分解から明らかである．よって命題 2.47 により，$\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ において (4.18), (4.19) が成立する．また，$\hat{\Delta}_{\mathrm{re}} = \bigcup_{p \in \tilde{J}} W(\hat{\beta}_p)$ (W はワイル群）は，基本ルート・データのみから定まるものなので，$\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ で考えても，$\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ で考えても同じものになる．したがって $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ でも (4.18) が成り立つ．さらに，命題 2.47 により，$\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ において，

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{im}} \subset \{\beta \in \sum_{p \in \tilde{J}} \mathbf{Z}\hat{\beta}_p \setminus \{0\} | (\beta, \beta) \leqq 0\} = \{n\delta | n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$$

であるが，$\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ は $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ の商リー代数なので，$\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ における虚ルートの集合は $\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ における虚ルートの集合 $\{n\delta | n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$ を含む．よって $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}})$ でも (4.19) が成り立つ．

このとき $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_{\mathrm{re}} \cup \hat{\Delta}_{\mathrm{im}}, \hat{\Delta}^+ = \hat{\Delta} \cap (\sum_{p \in \tilde{J}} \mathbf{Z}_{\geqq 0} \hat{\beta}_p)$ なので，(4.16), (4.17) も正しい．　∎

なお $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(\overline{n}))$ の具体的記述は付録 A の第 2 節参照されたい．

この節の残りの部分で，アフィン・リー代数に関して定理*2.13 が成り立っていることを見る．まず次を示す．

4.20［定理］　$\pi : \hat{\mathfrak{g}}' \to {}^L\mathfrak{g}$ を自然な準同型写像とする．リー代数の全射準同型写像 $F : \mathfrak{a} \to {}^L\mathfrak{g}$ があって，$\mathrm{Ker}(F)$ が $\mathfrak{a}$ の中心に含まれるならば，リー代数の準同型写像 $G : \hat{\mathfrak{g}}' \to \mathfrak{a}$ であって $F \circ G = \pi$ を満たすものが存在する（すなわち $\hat{\mathfrak{g}}'$ は ${}^L\mathfrak{g}$ の "普遍中心拡大" である）．

証明　$\mathfrak{z} = \mathrm{Ker}(F)$ とおく．また，線形写像 $H : {}^L\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ であって $F \circ H = \mathrm{id}$ となるものの全体を $\mathcal{A}$ で表す．

$H \in \mathcal{A}$ とする．$m, n \in \mathbf{Z}$ および $u \in \mathfrak{g}(\overline{m}), v \in \mathfrak{g}(\overline{n})$ に対して，

$$z^H_{m,n}(u, v) = [H(t^m u), H(t^n v)] - H(t^{m+n}[u, v])$$

とおくと，$F(z^H_{m,n}(u,v))=0$ が容易にわかり，よって $z^H_{m,n}(u,v)\in\mathfrak{z}$ である．したがって，双線形写像 $z^H_{m,n}:\mathfrak{g}(\overline{m})\times\mathfrak{g}(\overline{n})\to\mathfrak{z}$ が定まる．これに関して次が成立する：

$$z^H_{m,n}(u,v)=-z^H_{n,m}(v,u)\qquad (u\in\mathfrak{g}(\overline{m}),v\in\mathfrak{g}(\overline{n})),\tag{4.20}$$

$$z^H_{\ell+m,n}([u,v],w)+z^H_{m+n,\ell}([v,w],u)+z^H_{n+\ell,m}([w,u],v)=0$$
$$(u\in\mathfrak{g}(\overline{\ell}),v\in\mathfrak{g}(\overline{m}),w\in\mathfrak{g}(\overline{n})).\tag{4.21}$$

(4.20) は定義から明らかである．(4.21) を示すには，$z^H_{m,n}$ の定義と ${}^L\mathfrak{g}$ におけるヤコビ恒等式により，

$$[H(t^{\ell+m}[u,v]),H(t^nw)]+[H(t^{m+n}[v,w]),H(t^\ell u)]$$
$$+[H(t^{n+\ell}[w,u]),H(t^mv)]=0$$

を示せばよい．$[H(t^\ell u),H(t^mv)]-H(t^{\ell+m}[u,v])=z^H_{\ell,m}(u,v)\in\mathfrak{z}$ なので，

$$[H(t^{\ell+m}[u,v]),H(t^nw)]=[[H(t^\ell u),H(t^mv)],H(t^nw)]$$

が成立する．全く同様の式が，ℓ,m,n,u,v,w をそれぞれ m,n,ℓ,v,w,u（あるいは n,ℓ,m,w,u,v）に置き換えても成立するので，主張は $\mathfrak{a}$ におけるヤコビ恒等式から従う．

$H\in\mathcal{A}$ であって，任意の $n\in\mathbf{Z}$ に対して $z^H_{n,0}=0$ となるものの全体を $\mathcal{B}$ で表す．$\mathcal{B}\neq\emptyset$ を示そう．1つ $H\in\mathcal{A}$ をとる．$n\in\mathbf{Z}$ に対して $f_n:\mathfrak{g}(\overline{0})\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}),\mathfrak{z})$ を

$$(f_n(v))(u)=z^H_{n,0}(u,v)\qquad (u\in\mathfrak{g}(\overline{n}),v\in\mathfrak{g}(\overline{0}))$$

で定める．$\mathfrak{g}(\overline{n})$ は $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群であるが，$\mathfrak{z}$ を $uz=0$ $(u\in\mathfrak{g}(\overline{0}),z\in\mathfrak{z})$ により $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群と思うことにより，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}),\mathfrak{z})$ に $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群の構造が定まる（例 1.38）．これに関して次が成立する．

$$f_n([u,v])=u(f_n(v))-v(f_n(u))\qquad (u,v\in\mathfrak{g}(\overline{0})).\tag{4.22}$$

実際，$w\in\mathfrak{g}(\overline{n})$ に対して，

$$z^H_{n,0}(w,[u,v])=-z^H_{n,0}([u,w],v)+z^H_{n,0}([v,w],u)$$

を示せばよいが，これは (4.21) において $\ell = m = 0$ とおいた式に (4.20) を適用することにより得られる．$V = \mathbf{K}e \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z})$ とおく（$\mathbf{K}e$ は e を基底とする 1 次元のベクトル空間）．(4.22) により，V 上の $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群の構造が，

$$v(ze+h) = 0e + (vh + zf_n(v)) \qquad (v \in \mathfrak{g}(\overline{0}), z \in \mathbf{K}, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z}))$$

により定まる．このとき $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z})$ は V の部分 $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群である．

$\mathfrak{z}$ の部分空間 $\mathfrak{z}_1$ を

$$\mathfrak{z}_1 = \sum_{u \in \mathfrak{g}(\overline{n}), v \in \mathfrak{g}(\overline{0})} \mathbf{K}(f_n(v))(u)$$

により定める．$\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{g}(\overline{0})$ の有限次元性から $\dim \mathfrak{z}_1 < \infty$ である．したがって $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z}_1)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z})$ の有限次元部分 $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群と見なせる．また V への $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ の作用の定義により，$\tilde{V} = \mathbf{K}e \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z}_1)$ は，V の有限次元部分 $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群である．したがって定理 3.47 により，$\tilde{V}$ の部分 $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群 V' であって $\tilde{V} = V' \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z}_1)$ となるものが存在する．この V' に関して，$V = V' \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z})$ が成り立つことが，容易にわかる．

$V/\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z})$ は自明な $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群なので，V' も自明な $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群である．したがって $H'_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(\mathfrak{g}(\overline{n}), \mathfrak{z})$ であって，任意の $v \in \mathfrak{g}(\overline{0})$ に対して $v(e + H'_n) = 0$ となるものが存在する．すなわち $f_n(v) + vH'_n = 0$ $(v \in \mathfrak{g}(\overline{0}))$ が成り立つ．線形写像 $H' : {}^L\mathfrak{g} \to \mathfrak{a}$ を

$$H'(t^n u) = H'_n(u) \qquad (n \in \mathbf{Z}, u \in \mathfrak{g}(\overline{n})),$$

で定め，$H'' = H - H'$ とおく．H' の像は $\mathfrak{z} = \mathrm{Ker}(F)$ に含まれるので $F \circ H'' = F \circ H = \mathrm{id}$ が成り立ち，$H'' \in \mathcal{A}$ である．また

$$\begin{aligned}
z^{H''}_{n,0}(u,v) &= [H''(t^n u), H''(v)] - H''(t^n[u,v]) \\
&= [H(t^n u) - H'_n(u), H(v) - H'_0(v)] - (H(t^n[u,v]) - H'_n([u,v])) \\
&= [H(t^n u), H(v)] - H(t^n[u,v]) + H'_n([u,v]) \\
&= z^H_{n,0}(u,v) - H'_n([v,u]) \\
&= (f_n(v) + vH'_n)(u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

により，$H'' \in \mathcal{B}$ である．以上により $\mathcal{B} \neq \emptyset$ が示された．

以下 $H \in \mathcal{B}$ を1つとり固定する．(4.21) において $\ell = 0$ とすると，$H \in \mathcal{B}$ と (4.20) により，

$$z^H_{m,n}([u,v],w) + z^H_{m,n}(v,[u,w]) = 0 \quad (u \in \mathfrak{g}(\overline{0}), v \in \mathfrak{g}(\overline{m}), w \in \mathfrak{g}(\overline{n})) \tag{4.23}$$

となる．$\mathfrak{z}$ の基底 $\{c_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ を1つ選び，

$$z^H_{m,n}(u,v) = \sum_{\gamma \in \Gamma} z^H_{m,n,\gamma}(u,v) c_\gamma$$

により $z^H_{m,n,\gamma}(u,v) \in \mathbf{K}$ を定めると，

$$z^H_{m,n,\gamma}([u,v],w) + z^H_{m,n,\gamma}(v,[u,w]) = 0 \quad (u \in \mathfrak{g}(\overline{0}), v \in \mathfrak{g}(\overline{m}), w \in \mathfrak{g}(\overline{n})) \tag{4.24}$$

が成り立つ．したがって，$\varphi_{m,n,\gamma} : \mathfrak{g}(\overline{m}) \to \mathfrak{g}(\overline{n})^*$ を

$$(\varphi_{m,n,\gamma}(v))(w) = z^H_{m,n,\gamma}(v,w)$$

により定めると，これは $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群の準同型写像である．

次を示そう．

$$\overline{m} + \overline{n} \neq \overline{0} \quad \Longrightarrow \quad z^H_{m,n} = 0. \tag{4.25}$$

$z^H_{m,n} \neq 0$ とすると，$\varphi_{m,n,\gamma} \neq 0$ となる $\gamma \in \Gamma$ が存在するが，$\mathfrak{g}(\overline{m}), \mathfrak{g}(\overline{n})^*$ は既約 $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群なので，$\varphi_{m,n,\gamma}$ は同型写像でなくてはならない．したがって $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群として $\mathfrak{g}(\overline{m}) \cong \mathfrak{g}(\overline{n})^*$ である．定理 4.6 により，$\overline{m} + \overline{n} \neq \overline{0}$ で $\mathfrak{g}(\overline{m}) \cong \mathfrak{g}(\overline{n})^*$ が成り立つのは，$r = 3$ で $\overline{m} = \overline{n} \neq \overline{0}$ の場合のみである．この場合には，(4.21) により，$u \in \mathfrak{g}(\overline{2m}), v \in \mathfrak{g}(\overline{-m}), w \in \mathfrak{g}(\overline{n})$ に対して

$$z^H_{m,n}([u,v],w) = -z^H_{-m+n,2m}([v,w],u) - z^H_{n+2m,-m}([w,u],v)$$

であるが，$\overline{-m+n} = \overline{n+2m} = \overline{0}, \overline{2m} = \overline{-m} \neq \overline{0}$ から，$\mathfrak{g}(\overline{-m+n}) = \mathfrak{g}(\overline{n+2m})$ と $\mathfrak{g}(\overline{2m})^* = \mathfrak{g}(\overline{-m})^*$ は非同型な既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群になっているので，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\varphi_{-m+n,2m,\gamma} = \varphi_{n+2m,-m,\gamma} = 0$ となり，したがって $z^H_{-m+n,2m} = 0, z^H_{n+2m,-m} = 0$ が成り立つ．よって命題 4.11 により，

$$z^H_{m,n}(\mathfrak{g}(\overline{m}), \mathfrak{g}(\overline{n})) = z^H_{m,n}([\mathfrak{g}(\overline{2m}), \mathfrak{g}(\overline{-m})], \mathfrak{g}(\overline{n})) = \{0\}$$

となる．以上により (4.25) が示された．

次に $\overline{m}+\overline{n}=\overline{0}$ の場合を考えよう．$\varphi_{m,n}:\mathfrak{g}(\overline{m})\to\mathfrak{g}(\overline{n})^*$ を $(\varphi_{m,n}(u))(v)=\kappa(u,v)$ により定める．κ が不変形式であることと $\kappa|\mathfrak{g}(\overline{m})\times\mathfrak{g}(\overline{n})$ の非退化性により，$\varphi_{m,n}$ は $U(\mathfrak{g}(\overline{0}))$ 加群の同型写像である．一般に既約最高ウェイト加群に対してその自己準同型は定数倍を除いて一意的なので，$\varphi_{m,n,\gamma}=a_\gamma\varphi_{m,n}$ となる $a_\gamma\in\mathbf{K}$ が存在する．このとき $u\in\mathfrak{g}(\overline{m}),v\in\mathfrak{g}(\overline{n})$ に対して

$$
\begin{aligned}
z^H_{m,n}(u,v)&=\sum_{\gamma\in\Gamma}z^H_{m,n,\gamma}(u,v)c_\gamma=\sum_{\gamma\in\Gamma}(\varphi_{m,n,\gamma}(u))(v)c_\gamma\\
&=(\varphi_{m,n}(u))(v)(\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma c_\gamma)=\kappa(u,v)\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma c_\gamma
\end{aligned}
$$

となる．したがって $c_{m,n}=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma c_\gamma\in\mathfrak{z}$ とおくと，

$$
z^H_{m,n}(u,v)=\kappa(u,v)c_{m,n}\qquad(\overline{m}+\overline{n}=\overline{0},u\in\mathfrak{g}(\overline{m}),v\in\mathfrak{g}(\overline{n}))\tag{4.26}
$$

が成り立つ．

そこで線形写像 $G:\hat{\mathfrak{g}}'\to\mathfrak{a}$ を

$$
G(t^nu)=H(t^nu)\quad(n\in\mathbf{Z},u\in\mathfrak{g}(\overline{n})),\qquad G(c)=c_{1,-1}
$$

により定める．このとき $F\circ G=\pi$ は明らかである．G がリー代数の準同型写像であることを示そう．c および $G(c)$ はそれぞれ $\hat{\mathfrak{g}}'$ および $\mathfrak{a}$ の中心に属するので，$u\in\mathfrak{g}(\overline{m}),v\in\mathfrak{g}(\overline{n})$ のときに，$[G(t^mu),G(t^nv)]=G([t^mu,t^nv])$ が成り立っていることを見ればよい．

$$
\begin{aligned}
[G(t^mu),G(t^nv)]&=[H(t^mu),H(t^nv)]=H(t^{m+n}[u,v])+z^H_{m,n}(u,v)\\
&=G(t^{m+n}[u,v])+z^H_{m,n}(u,v)
\end{aligned}
$$

であるが，$\overline{m}+\overline{n}\neq\overline{0}$ のときは，$z^H_{m,n}=0,[t^mu,t^nv]=t^{m+n}[u,v]$ なので主張は成り立っている．$\overline{m}+\overline{n}=\overline{0}$ のときは，$z^H_{m,n}(u,v)=\kappa(u,v)c_{m,n}$ と

$$
\begin{aligned}
G([t^mu,t^nv])&=G(t^{m+n}[u,v]+m\delta_{m+n,0}\kappa(u,v)c)\\
&=G(t^{m+n}[u,v])+m\delta_{m+n,0}\kappa(u,v)c_{1,-1}
\end{aligned}
$$

により，

$$
c_{m,n}=m\delta_{m+n,0}c_{1,-1}\qquad(\overline{m}+\overline{n}=\overline{0})\tag{4.27}
$$

を示せばよい．

(4.20) と $H \in \mathcal{B}$ により，

$$c_{m,n} = -c_{n,m} \qquad (\overline{m} + \overline{n} = \overline{0}), \tag{4.28}$$

$$c_{n,0} = 0 \qquad (\overline{n} = \overline{0}) \tag{4.29}$$

が成り立っている．また (4.21) により，$\overline{\ell} + \overline{m} + \overline{n} = \overline{0}, u \in \mathfrak{g}(\overline{\ell}), v \in \mathfrak{g}(\overline{m}), w \in \mathfrak{g}(\overline{n})$ のとき

$$\kappa([u,v],w)c_{\ell+m,n} + \kappa([v,w],u)c_{m+n,\ell} + \kappa([w,u],v)c_{n+\ell,m} = 0$$

であるが，κ の不変性により $\kappa([u,v],w) = \kappa([v,w],u) = \kappa([w,u],v)$ なので，命題 4.11 と κ の非退化性により

$$c_{\ell+m,n} + c_{m+n,\ell} + c_{n+\ell,m} = 0 \qquad (\overline{\ell} + \overline{m} + \overline{n} = \overline{0}) \tag{4.30}$$

も成り立つ．

(4.30) で $\ell = 1, n = -m-1$ とおくと，(4.28) により

$$c_{m+1,-m-1} = -c_{-1,1} - c_{-m,m} = c_{1,-1} + c_{m,-m}$$

なので，m に関する帰納法により $c_{m,-m} = mc_{1,-1}$ $(m > 0)$ がわかる．よって (4.28), (4.29) により，任意の $m \in \mathbf{Z}$ について，$c_{m,-m} = mc_{1,-1}$ が成立する．

次に $k \neq 0, \overline{k} = \overline{0}$ のとき，任意の m について $c_{m,k-m} = 0$ が成り立つことを示す．(4.30) において，$\ell = 1, n = k-m-1$ とおくと，

$$c_{k-1,1} = c_{k-m-1,m+1} - c_{k-m,m} \tag{4.31}$$

となる．$k > 0$ のときは

$$kc_{k-1,1} = \sum_{m=0}^{k-1} (c_{k-m-1,m+1} - c_{k-m,m}) = c_{0,k} - c_{k,0} = 0,$$

$k < 0$ のときは

$$|k|c_{k-1,1} = \sum_{m=k}^{-1} (c_{k-m-1,m+1} - c_{k-m,m}) = c_{k,0} - c_{0,k} = 0$$

となるので (ここで (4.28), (4.29) を用いた), $c_{k-1,1}=0$ である．よって (4.31) により $c_{k-m-1,m+1}=c_{k-m,m}$ となるが，これは $c_{k-m,m}$ が m の取り方によらないことを意味する．よって $c_{k-m,m}=c_{k-1,1}=0$ が示された．以上により (4.27) が示され，定理の証明が完了した． ∎

4.21 [定理]　自然な準同型写像 $\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}}) \to \mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}})$ は同型写像である．すなわち，アフィン・リー代数について定理*2.13 は正しい．

証明　簡単のため，

$$\mathfrak{g}_{\max}=\mathfrak{g}_{\max}(\Phi_{\tilde{B}}), \qquad \mathfrak{g}'_{\max}=[\mathfrak{g}_{\max},\mathfrak{g}_{\max}],$$
$$\mathfrak{g}_{\min}=\mathfrak{g}_{\min}(\Phi_{\tilde{B}}), \qquad \mathfrak{g}'_{\min}=[\mathfrak{g}_{\min},\mathfrak{g}_{\min}]$$

とおく．このとき命題 2.14 により，

$$\mathfrak{g}'_{\max}=(\mathfrak{h}(0)\oplus \mathbf{K}c)\oplus(\bigoplus_{\hat{\beta}\in\hat{\Delta}}(\mathfrak{g}_{\max})_{\hat{\beta}})=[\mathfrak{g}'_{\max},\mathfrak{g}'_{\max}],$$
$$\mathfrak{g}'_{\min}=(\mathfrak{h}(0)\oplus \mathbf{K}c)\oplus(\bigoplus_{\hat{\beta}\in\hat{\Delta}}(\mathfrak{g}_{\min})_{\hat{\beta}})=[\mathfrak{g}'_{\min},\mathfrak{g}'_{\min}]$$

である．特に，

$$\mathfrak{g}_{\max}=\mathfrak{g}'_{\max}\oplus\mathbf{K}d, \qquad \mathfrak{g}_{\min}=\mathfrak{g}'_{\min}\oplus\mathbf{K}d$$

が成立している．自然な全射準同型写像 $\mathfrak{g}_{\max}\to\mathfrak{g}_{\min}$ を制限して，全射準同型写像 $F:\mathfrak{g}'_{\max}\to\mathfrak{g}'_{\min}$ を得る．この F が同型写像であることを示せばよい．

まず $\mathrm{Ker}(F)$ が $\mathfrak{g}'_{\max}$ の中心に含まれることを示そう．それには $\mathfrak{g}'_{\max}$ の生成系 $\{e_p,f_p\}_{p\in\tilde{J}}$ に関して (命題 2.14 参照), $[e_p,\mathrm{Ker}(F)]=[f_p,\mathrm{Ker}(F)]=\{0\}$ を示せばよい．F を制限して，全射線形写像 $(\mathfrak{g}_{\max})_{\hat{\beta}}\to(\mathfrak{g}_{\min})_{\hat{\beta}}$ ($\hat{\beta}\in\hat{\Delta}$) を得るが，$\hat{\beta}\in\hat{\Delta}_{\mathrm{re}}$ ならば $\dim(\mathfrak{g}_{\max})_{\hat{\beta}}=\dim(\mathfrak{g}_{\min})_{\hat{\beta}}=1$ なので，$\mathrm{Ker}(F)\subset \bigoplus_{\hat{\beta}\in\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}}(\mathfrak{g}_{\max})_{\hat{\beta}}$ である．したがって

$$[e_p,\mathrm{Ker}(F)]\subset\mathrm{Ker}(F)\cap(\bigoplus_{\hat{\beta}\in\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}}(\mathfrak{g}_{\max})_{\hat{\beta}+\hat{\beta}_p})\subset\bigoplus_{\hat{\beta}\in\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}\cap(\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}+\hat{\beta}_p)}(\mathfrak{g}_{\max})_{\hat{\beta}}$$

であるが，命題 4.19 により $\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}\cap(\hat{\Delta}_{\mathrm{im}}+\hat{\beta}_p)=\emptyset$ なので，$[e_p,\mathrm{Ker}(F)]=\{0\}$ がわかる．また全く同様に，$[f_p,\mathrm{Ker}(F)]=\{0\}$ である．よって $\mathrm{Ker}(F)$ が $\mathfrak{g}'_{\max}$ の中心に含まれることが示された．

定理 4.17 により，$\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}/\mathbf{K}c$ は ${}^L\mathfrak{g}$ と同型である．$\pi : \mathfrak{g}'_{\mathrm{min}} \to {}^L\mathfrak{g}$ を自然な準同型写像とし，$F' = \pi \circ F$ とおく．F' はリー代数の全射準同型写像である．また $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathbf{K}c$ なので，

$$\mathrm{Ker}(F') = \mathrm{Ker}(F) + \mathbf{K}c \tag{4.32}$$

が成り立つ．c は $\mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}$ の中心に属するので，$\mathrm{Ker}(F')$ は $\mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}$ の中心に含まれる．したがって定理 4.20 により，リー代数の準同型写像 $G : \mathfrak{g}'_{\mathrm{min}} \to \mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}$ であって $F' \circ G = \pi$ となるものが存在する．

このとき $\mathfrak{g}'_{\mathrm{max}} = G(\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}) + \mathrm{Ker}(F')$ である．実際，$x \in \mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}$ とすると $x = G(F(x)) + (x - G(F(x))$ であるが，$F'(x - G(F(x))) = F'(x) - F'(x) = 0$ により，$x - G(F(x)) \in \mathrm{Ker}(F')$ である．したがって，$\mathrm{Ker}(F')$ が $\mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}$ の中心に含まれることにより，

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}'_{\mathrm{max}} &= [\mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}, \mathfrak{g}'_{\mathrm{max}}] = [G(\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}) + \mathrm{Ker}(F'), G(\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}) + \mathrm{Ker}(F')] \\ &= [G(\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}), G(\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}})] = G([\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}, \mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}]) = G(\mathfrak{g}'_{\mathrm{min}})\end{aligned}$$

となり，G の全射性がわかった．

$x \in \mathrm{Ker}(F')$ とする．$x = G(y)$ となる $y \in \mathfrak{g}'_{\mathrm{min}}$ をとると，$\pi(y) = F'(G(y)) = F'(x) = 0$ となるので，$y \in \mathbf{K}c$ である．したがって $\mathrm{Ker}(F') = \mathbf{K}G(c)$ となり，$\dim \mathrm{Ker}(F') = 1$ がわかる．$c \in \mathrm{Ker}(F')$ なので，$\mathrm{Ker}(F') = \mathbf{K}c$ となる．よって (4.32) により $\mathrm{Ker}(F) \subset \mathbf{K}c$ となるが，F の定義により $\mathrm{Ker}(F) \cap \mathbf{K}c = \{0\}$ であるので，$\mathrm{Ker}(F) = \{0\}$ となり，F が単射であることがわかる．したがって F は同型写像である． ∎

3. 指標公式

この節では，第 1，2 節の記号はご破算にし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ をカッツ・ムーディ・リー代数であって，非退化な標準不変形式

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{K} \tag{4.33}$$

をもつものとする．また，$\mathfrak{h}^*$ の部分集合 P, P^+ を

$$\begin{aligned}P &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \lambda(h_i) \in \mathbf{Z}\ (i \in I)\}, \\ P^+ &= \{\lambda \in P | \lambda(h_i) \geqq 0\ (i \in I)\}\end{aligned}$$

により定める．さらに$\rho \in \mathfrak{h}^*$であって，任意の$i \in I$に対して$\rho(h_i) = 1$となるものを1つ選び固定する．これは，$\mathfrak{g}$が有限次元のときに定めたρの自然な拡張になっている（命題3.37(i) 参照）．

4.22 [補題]　$w \in W$に対して，$\rho - w\rho = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^-} \alpha$.

証明　$\ell(w)$に関する帰納法を用いる．$\ell(w) = 0$のときは明らか．$\ell(w) > 0$とする．$\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$となる$i \in I$をとるとき，帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}\rho - w\rho &= \rho - (ws_i)s_i\rho = \rho - (ws_i)(\rho - \alpha_i) = \rho - (ws_i)\rho - w(\alpha_i) \\ &= \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap ws_i\Delta^-} \alpha - w(\alpha_i)\end{aligned}$$

となるが，補題2.38により$\Delta^+ \cap w(\Delta^-) = (\Delta^+ \cap ws_i(\Delta^-)) \sqcup \{-w(\alpha_i)\}$であるので，主張が成立する．∎

この節の目標は，次に述べるワイルの指標公式の拡張（Kac[21]）を示すことである．

4.23 [定理]

(i) λを最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群Vが可積分であるための必要十分条件は，$\lambda \in P^+$で$V \cong L(\lambda)$となることである．

(ii) $\lambda \in P^+$に対して，$M(\lambda)$の最大真部分加群$K(\lambda)$は次で与えられる：

$$K(\lambda) = \sum_{i \in I} U(\mathfrak{g}) f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda = \sum_{i \in I} U(\mathfrak{n}^-) f_i^{\lambda(h_i)+1} m_\lambda.$$

(iii) $\lambda \in P^+$に対して

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \frac{\sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \mathbf{e}^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \mathbf{e}^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}}. \tag{4.34}$$

(4.34) をワイル・カッツの指標公式と呼ぶ．

$\{h_i\}_{i \in I}$は$\mathfrak{h}$の基底となっているとは限らないので，ρ自体は一意的には決まらないが，$w \in W$に対する$\rho - w\rho$は，補題4.22によりρの選び方によらずに定まる．したがって(4.34)の右辺は，ρの取り方にはよらずに定まる．

V が自明加群 $L(0)$ の場合を考えて，ワイルの分母公式の類似

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}=\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w\rho-\rho} \tag{4.35}$$

が得られる．また，これを用いて $\dim\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha\in\Delta)$ を帰納的に計算できる．

4.24 ［注意］ Φ に付随するカルタン行列が対称化可能でない場合にも，次の意味でのワイル・カッツの指標公式の類似が成り立つことが，クマールとマチュー により示されている（Kumar[31], Mathieu[36]）．

$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ とする．また $\lambda\in P^+$ に対して，

$$L_{\max}(\lambda)=M(\lambda)/\sum_{i\in I}U(\mathfrak{g})f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$$

とおく．このとき，

$$\mathrm{ch}(L_{\max}(\lambda))=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^{\ell(w)}\mathbf{e}^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}} \tag{4.36}$$

が成り立つ．クマールとマチュー による証明は旗多様体を用いる代数幾何学的なものであり，本書のレベルを超えている．

第3章4節で述べた，有限次元カッツ・ムーディ・リー代数に対するワイルの指標公式の証明において，カシミール元という包絡代数の中心の元が重要な役割を演じた．まずその類似物を考える．ただし，有限次元の場合のカシミール元の定義はそのままでは意味をもたないので，注意が必要である．各 $\beta\in\Delta^+\cup\{0\}$ に対して $\mathfrak{g}_\beta$ の基底 $\{x_\beta^p\}_{p=1}^{n_\beta}$ を1つ選ぶ $(n_\beta=\dim\mathfrak{g}_\beta=\dim\mathfrak{g}_{-\beta})$．$\kappa|\mathfrak{g}_\beta\times\mathfrak{g}_{-\beta}$ は非退化なので，$\mathfrak{g}_{-\beta}$ の基底 $\{y_\beta^p\}_{p=1}^{n_\beta}$ であって，$\kappa(x_\beta^p,y_\beta^q)=\delta_{pq}$ を満たすものがとれる．このとき $U(\mathfrak{g})$ の元

$$\Omega_\beta=\sum_{p=1}^{n_\beta}y_\beta^p x_\beta^p \qquad (\beta\in\Delta^+\cup\{0\})$$

は基底の選び方によらないことが容易にわかる．そこで

$$\Omega=\Omega_0+t_{2\rho}+2\sum_{\alpha\in\Delta^+}\Omega_\alpha \tag{4.37}$$

とおく（$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $t_\lambda \in \mathfrak{h}$ は，$\kappa(t_\lambda, h) = \lambda(h)$ $(h \in \mathfrak{h})$ で定まるものである）．これは有限次元の場合のカシミール元 (3.14) の類似物であることに注意されたい．ただし，(4.37) は無限和なので，$U(\mathfrak{g})$ の元としては意味をもたない．そこで，(4.37) がその上の作用素として意味をもつような $U(\mathfrak{g})$ 加群のクラスを設定して，このクラスの $U(\mathfrak{g})$ 加群に考察を限定することにする．

4.25［定義］　$U(\mathfrak{g})$ 加群 M が以下の条件を満たすとき，M は**クラス $\mathcal{O}$** (class $\mathcal{O}$) に属するという．

(a) M はウェイト加群である（定義 2.19 参照）．

(b) 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$M_{\lambda+\gamma} \neq \{0\}$ を満たす $\gamma \in Q^+$ は有限個しか存在しない．

容易にわかるように，最高ウェイト加群はすべてクラス $\mathcal{O}$ に属する．

$U(\mathfrak{g})$ 加群 M がクラス $\mathcal{O}$ に属するとする．$m \in M_\lambda$ とすると，$\mathfrak{g}_\alpha m \subset M_{\lambda+\alpha}$ であるが，仮定により $M_{\lambda+\alpha} \neq \{0\}$ を満たす $\alpha \in \Delta^+$ は有限個しか存在しないので，有限個の $\alpha \in \Delta^+$ を除いて $\Omega_\alpha m = 0$ となり，

$$\Omega m = \Omega_0 m + t_{2\rho} m + 2 \sum_{\alpha \in \Delta^+} \Omega_\alpha m$$

は有限和として確定する．また M はウェイト加群なので，一般の $m \in M$ に対しても $\Omega m \in M$ が定まる．これにより，クラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\mathfrak{g})$ 加群 M の線形変換として $\Omega : M \to M$ が定まった．これを**カシミール作用素**（Casimir operator）と呼ぶ．次は明らかであろう．

4.26［補題］　M, N をクラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\mathfrak{g})$ 加群とし，$f : M \to N$ を $U(\mathfrak{g})$ 加群の準同型写像とする．このとき任意の $m \in M$ に対して $f(\Omega m) = \Omega f(m)$ が成立する．

有限次元の場合のカシミール元は $U(\mathfrak{g})$ の中心の元であったが，これに対応する性質として，次が成り立つ．

4.27［命題］　M をクラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．このとき $m \in M, u \in U(\mathfrak{g})$ に対して $\Omega u m = u \Omega m$ が成り立つ．

証明　$u = h \in \mathfrak{h}$, $u = e_i$, $u = f_i\,(i \in I)$ の 3 つの場合に示せば十分である．$u = h$ のときは，$[h, \Omega_\beta] = 0$ $(\beta \in \Delta \cup \{0\})$, $[h, t_{2\rho}] = 0$ により明らかである．$u = f_i$ のときを考える．$\alpha \in \Delta^+$ に対して

$$[f_i, \Omega_\alpha] = [f_i, \sum_p y^p_\alpha x^p_\alpha] = \sum_p [f_i, y^p_\alpha] x^p_\alpha + \sum_p y^p_\alpha [f_i, x^p_\alpha]$$

となる．ここで，$\alpha + \alpha_i \notin \Delta^+$ のとき $[f_i, y^p_\alpha] = 0$，また $\alpha - \alpha_i \notin \Delta^+ \cup \{0\}$ のとき $[f_i, x^p_\alpha] = 0$ である．$\alpha - \alpha_i \in \Delta^+ \cup \{0\}$ のとき，$[f_i, x^p_\alpha] = \sum_q c_{pq} x^q_{\alpha-\alpha_i}$，$[f_i, y^q_{\alpha-\alpha_i}] = \sum_p d_{qp} y^p_\alpha$ とすると，

$$c_{pq} = \kappa(y^q_{\alpha-\alpha_i}, [f_i, x^p_\alpha]) = -\kappa([f_i, y^q_{\alpha-\alpha_i}], x^p_\alpha) = -d_{qp}$$

により，

$$\begin{aligned}\sum_p y^p_\alpha [f_i, x^p_\alpha] &= \sum_q (\sum_p c_{pq} y^p_\alpha) x^q_{\alpha-\alpha_i} = -\sum_q (\sum_p d_{qp} y^p_\alpha) x^q_{\alpha-\alpha_i} \\ &= -\sum_q [f_i, y^q_{\alpha-\alpha_i}] x^q_{\alpha-\alpha_i}\end{aligned}$$

となる．したがって，$\beta \in \Delta^+ \cup \{0\}$ に対して $\Omega'_\beta = \sum_p [f_i, y^p_\beta] x^p_\beta$，それ以外の β に対して $\Omega'_\beta = 0$ とおくとき，$\alpha \in \Delta^+$ に対して $[f_i, \Omega_\alpha] = \Omega'_\alpha - \Omega'_{\alpha-\alpha_i}$ が成立している．

$t_{\alpha_i} = \sum_p c_p x^p_0$ とすると，$c_p = \kappa(y^p_0, t_{\alpha_i}) = \alpha_i(y^p_0)$ なので，

$$\Omega'_0 = \sum_p [f_i, y^p_0] x^p_0 = f_i \sum_p \alpha_i(y^p_0) x^p_0 = f_i t_{\alpha_i}$$

である．同様にして $\sum_p y^p_0 [f_i, x^p_0] = t_{\alpha_i} f_i = f_i t_{\alpha_i} - (\alpha_i, \alpha_i) f_i$ となるので，$[f_i, \Omega_0] = 2\Omega'_0 - (\alpha_i, \alpha_i) f_i$ である．また $[f_i, t_{2\rho}] = 2(\rho, \alpha_i) f_i = (\alpha_i, \alpha_i) f_i$ が成り立っている．

そこで $\alpha + \alpha_i \notin \Delta^+$ のときに $\Omega'_\alpha = 0$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}&f_i \Omega m - \Omega f_i m \\ =&[f_i, \Omega_0] m + [f_i, t_{2\rho}] m + 2 \sum_{\alpha \in \Delta^+} [f_i, \Omega_\alpha] m \\ =&2\Omega'_0 m - (\alpha_i, \alpha_i) f_i m + (\alpha_i, \alpha_i) f_i m\end{aligned}$$

$$+2\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \alpha+\alpha_i\in\Delta^+}}\Omega'_\alpha m-2\sum_{\substack{\alpha\in\Delta^+\\ \alpha-\alpha_i\in\Delta^+\cup\{0\}}}\Omega'_{\alpha-\alpha_i}m$$

$$=0.$$

$u=f_i$ のとき主張が示された．$u=e_i$ のときも同様なので，詳細は読者に委ねる． ∎

次の事実は，命題 3.36 と全く同様の論法で示される．

4.28 [命題]　M を最高ウェイト λ の最高ウェイト加群とするとき，カシミール作用素 Ω は M に定数倍 $(\lambda,\lambda+2\rho)\,\mathrm{id}$ により作用する．

さて，$\mathfrak{g}$ が有限次元のとき，最高ウェイト加群は有限の長さの組成列をもつのであったが（命題 3.48），一般にはこれは正しくない．ただし，クラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\mathfrak{g})$ 加群 M における既約最高ウェイト加群 $L(\mu)$ の重複度 $[M:L(\mu)]$ は，以下の論法により定めることができる．

$\mathfrak{h}^*$ の部分集合 Ξ であって，有限個の $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathfrak{h}^*$ に関して $\Xi=\bigcup_{p=1}^n(\lambda_p+Q^+)$ と書けるもののことを上方集合と呼ぶ．また Ξ を上方集合，M をクラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\mathfrak{g})$ 加群とするとき，M の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群の有限増大列

$$\{0\}=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_r=M \tag{4.38}$$

であって，各 M_i/M_{i-1} に関して次の (a)，(b) のいずれかが成り立っているようなもののことを，Ξ 列と呼ぶ（いずれも本書だけの言葉遣いである）．

(a) $\mu\in\Xi$ に対して $(M_i/M_{i-1})_\mu=\{0\}$.

(b) $(M_i/M_{i-1})\cong L(\mu)$ となる $\mu\in\mathfrak{h}^*$ が存在する．

4.29 [命題]　M をクラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\mathfrak{g})$ 加群とする．

(i) $\Xi\subset\mathfrak{h}^*$ を上方集合とするとき，M の Ξ 列が存在する．

(ii) $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ とする．λ を含む上方集合 Ξ と M の Ξ 列 (4.38) に対して，

$$[M:L(\lambda)]=\sharp\{i|(M_i/M_{i-1})\cong L(\lambda)\}$$

は，Ξ および Ξ 列 (4.38) の取り方によらずに，M と λ のみから一意的に定まる．

(iii) $\mathrm{ch}(M) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} [M : L(\lambda)]\, \mathrm{ch}(L(\lambda))$.

証明　(i) M の Ξ 列の存在を，$n(M) = \sum_{\mu\in\Xi} \dim M_\mu$ に関する帰納法を用いて示す（M はクラス $\mathcal{O}$ に属するので，$n(M)$ は有限である）．$n(M) = 0$ ならば，$\{0\} = M_0 \subset M_1 = M$ として条件が満たされる．$n(M) > 0$ とする．$M_\mu \neq \{0\}$ を満たす $\mu \in \Xi$ のうちで標準半順序に関して極大なもの ν を 1 つ選び，M_ν の非零元 m を 1 つとる．$\nu' > \nu$ のとき $M_{\nu'} = \{0\}$ なので，$N = U(\mathfrak{g})m$ は最高ウェイト ν の最高ウェイト加群である．したがって，N の最大真部分加群を L とすると，$N/L \cong L(\nu)$ が成り立つ．また，増大列 $\{0\} \subset L \subset N \subset M$ において $n(L) + n(N/L) + n(M/N) = n(M)$ であるが，$n(N/L) > 0$ なので，$n(L) < n(M)$, $n(M/N) < n(M)$ が成り立つ．したがって，L および M/N に帰納法の仮定を適用して，M の Ξ 列の存在が示された．

(ii) まず Ξ を上方集合とするとき，$\mu \in \Xi$ に対する $n_\mu = \sharp\{i | (M_i/M_{i-1}) \cong L(\mu)\}$ が Ξ 列 (4.38) の取り方によらないことを示そう．$M_\mu = \{0\}$ なら当然 $n_\mu = 0$ なので，$\Xi_0 = \{\nu \in \Xi | M_\nu \neq \{0\}\}$ に含まれる μ について n_μ が (4.38) の取り方によらないことを示せばよい．M はクラス $\mathcal{O}$ に属するので，Ξ_0 は有限集合である．n_μ の定義により

$$\dim M_\mu = \sum_{\nu\in\Xi_0,\, \nu \geqq \mu} n_\nu \dim L(\nu)_\mu \qquad (\mu \in \Xi_0) \tag{4.39}$$

が成立しているので，$\{n_\nu\}_{\nu\in\Xi_0}$ に関する線形方程式系 (4.39) から n_ν が一意的に決まってしまうことを示せばよい．いま Ξ_0 の真部分集合 Ξ_0' に属する ν に対して n_ν が決まっているとする．$\Xi_0 \setminus \Xi_0'$ の極大元 μ を 1 つ選び，これに関して (4.39) を考えると，これから n_μ が一意的に定まる．よって $\nu \in \Xi_0' \cup \{\mu\}$ に対して n_μ が決まる．これを順次繰り返すことにより，$\nu \in \Xi_0$ に対する n_ν がすべて (4.39) から一意的に定まる．以上により $\lambda \in \Xi$ に対する $n_\lambda^\Xi = \sharp\{i | (M_i/M_{i-1}) \cong L(\lambda)\}$ が Ξ のみから定まることがわかった．

次に，n_λ^Ξ は λ を含む上方集合 Ξ の取り方にもよらないことを示そう．Ξ, Ξ' を共に λ を含む上方集合とする．$\Xi'' = \Xi \cup \Xi'$ とおくと，Ξ'' も λ を含む上方集合で Ξ, Ξ' を含んでいる．したがって Ξ'' 列は Ξ 列でかつ Ξ' 列になっている．

よって $n_\lambda^\Xi = n_\lambda^{\Xi''} = n_\lambda^{\Xi'}$ が成立する．

(iii) は (4.39) から明らかである．∎

$a \in \mathbf{K}$ に対して

$$\Gamma_a = \{\nu \in \mathfrak{h}^* | (\nu+\rho, \nu+\rho) = a\}$$

とおく

4.30［命題］　$\lambda \in \Gamma_a$ のとき，

$$\mathrm{ch}(L(\lambda)) = \sum_{\mu \in \Gamma_a, \mu \leqq \lambda} p_{\mu,\lambda}\, \mathrm{ch}(M(\mu)) \tag{4.40}$$

と書ける．ここで，$p_{\mu,\lambda}$ は整数，また $p_{\lambda,\lambda} = 1$ である．

証明　$\xi \in \Gamma_a$ とする．$M = M(\xi)$ に命題 4.29 を適用して，$\mathrm{ch}(M(\xi)) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} [M(\xi) : L(\mu)]\, \mathrm{ch}(L(\mu))$ を得る．$[M(\xi) : L(\mu)] \neq 0$ とすると，$M(\xi)$ の部分 $U(\mathfrak{g})$ 加群 $M \supset M'$ であって $M/M' \cong L(\mu)$ を満たすものが存在するので，$\mu \leqq \xi$ である．また命題 4.27，命題 4.28 により $(\xi, \xi+2\rho) = (\mu, \mu+2\rho)$ が成り立つ．よって $\xi \in \Gamma_a$ のとき

$$\mathrm{ch}(M(\xi)) = \sum_{\mu \in \Gamma_a, \mu \leqq \xi} q_{\mu,\xi}\, \mathrm{ch}(L(\mu)) \qquad (q_{\mu,\xi} = [M(\xi) : L(\mu)])$$

が成立する．$q_{\mu,\xi}$ は非負整数で，$q_{\xi,\xi} = 1$ である．

整数の族 $\{p_{\mu,\lambda} | \mu \in \Gamma_a, \mu \leqq \lambda\}$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{\mu \in \Gamma_a, \mu \leqq \lambda} p_{\mu,\lambda}\, \mathrm{ch}(M(\mu)) &= \sum_{\mu \in \Gamma_a, \mu \leqq \lambda} p_{\mu,\lambda} \left(\sum_{\nu \in \Gamma_a, \nu \leqq \mu} q_{\nu,\mu}\, \mathrm{ch}(L(\nu)) \right) \\ &= \sum_{\nu \in \Gamma_a, \nu \leqq \lambda} \left(\sum_{\mu \in \Gamma_a, \nu \leqq \mu \leqq \lambda} q_{\nu,\mu} p_{\mu,\lambda} \right) \mathrm{ch}(L(\nu))\end{aligned}$$

となるので，(4.40) が成立するための必要十分条件は，任意の $\nu \in \Gamma_a, \nu \leqq \lambda$ に対して

$$\sum_{\mu \in \Gamma_a, \nu \leqq \mu \leqq \lambda} q_{\nu,\mu} p_{\mu,\lambda} = \delta_{\lambda,\nu} \qquad (\nu \in \Gamma_a, \nu \leqq \lambda)$$

が成り立つことである．$q_{\nu,\nu}=1$ に注意すると，これは $p_{\lambda,\lambda}=1$ かつ

$$p_{\nu,\lambda}=-\sum_{\mu\in\Gamma_a,\nu<\mu\leqq\lambda}q_{\nu,\mu}p_{\mu,\lambda}\qquad(\nu\in\Gamma_a,\nu<\lambda)\tag{4.41}$$

とも同値である．したがって $\nu<\mu\leqq\lambda$ を満たす任意の $\mu\in\Gamma_a$ に対して $p_{\mu,\lambda}$ が決まっていれば，(4.41) により，$p_{\nu,\lambda}$ が決まる．このようにして，$p_{\nu,\lambda}$ が ν に関して上から順番に決まって，(4.40) が成立する．∎

定理 4.23 の証明　(i) 十分性は既に系 2.64 において示されている．また必要性も定理 3.41 の (b)⟹(c) の証明と全く同様に示されるので詳細は読者に委ねる（そこで用いられた補題 3.39(ii), (iii) の証明は $\mathfrak{g}$ が有限次元でなくてもそのまま成り立つ）．

(ii) 命題 2.62 の証明により，$U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^+)f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda=\mathbf{K}f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$ である．したがって

$$U(\mathfrak{g})f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda=U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^+)f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda=U(\mathfrak{n}^-)f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$$

が成立する．$K=\sum_{i\in I}U(\mathfrak{g})f_i^{\lambda(h_i)+1}m_\lambda$ とおく．命題 2.63 により，$M(\lambda)/K$ は可積分な最高ウェイト加群である．よって (i) により $L(\lambda)=M(\lambda)/K$，すなわち $K=K(\lambda)$ が成り立つ．

(iii) 以下

$$\Gamma=\{\mu\in\mathfrak{h}^*|\mu\leqq\lambda,\,(\mu+2\rho,\mu)=(\lambda+2\rho,\lambda)\}$$

とおく．

命題 4.30 と (2.124) により

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))=\frac{\sum_{\mu\in\Gamma}p_\mu\mathbf{e}^\mu}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha}}\qquad(p_\mu\in\mathbf{Z},\ p_\lambda=1)\tag{4.42}$$

が成り立つ．環 R を $R=\mathbf{Z}[[\mathbf{e}^{-\alpha_i}|i\in I]]$ により定めるとき，(4.42) は，階数 1 の自由 R 加群 $R\mathbf{e}^\lambda$ における等式である．$D\in R$ および $\tilde{D}\in R\mathbf{e}^\rho$ を

$$D=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-\mathbf{e}^{-\alpha})^{\dim\mathfrak{g}_\alpha},\qquad\tilde{D}=\mathbf{e}^\rho D$$

により定めるとき，(4.42) は $R\mathbf{e}^{\lambda}$ における等式 $\mathrm{ch}(L(\lambda))D=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu}\mathbf{e}^{\mu}$ と同値である．また $R\mathbf{e}^{\lambda+\rho}$ における等式

$$\mathrm{ch}(L(\lambda))\tilde{D}=\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu}\mathbf{e}^{\mu+\rho} \tag{4.43}$$

とも同値である．

そこでワイル群 W の作用を考える．$\mathfrak{g}$ が有限次元の場合には (4.43) の両辺は有限和だったので話が簡単だったが，いまの場合には無限和になっているので注意が必要である．$R\mathbf{e}^{\xi}$ の元 $f=\sum_{\nu}a_{\nu}\mathbf{e}^{\nu}$ に形式的に $w\in W$ を作用させて，$wf=\sum_{\nu}a_{\nu}\mathbf{e}^{w\nu}$ を考えるとき，場合によっては，これがある ξ' に対する $R\mathbf{e}^{\xi'}$ に納まってくれることがある（これは f と w に関する特別な状況であって，ξ' をどのようにとっても $R\mathbf{e}^{\xi'}$ に納まらないほうが普通である）．以下，このような場合にのみ wf を考えることにする．wf_1 と wf_2 を考えることができるならば，$w(f_1f_2)$ も考えることができて，$w(f_1f_2)=(wf_1)(wf_2)$ が成り立つ．

$w\in W$ とすると，命題 2.21 により，$w\,\mathrm{ch}(L(\lambda))=\mathrm{ch}(L(\lambda))$ である．また $\mathfrak{g}$ が有限次元のときと全く同様にして $w(\tilde{D})=(-1)^{\ell(w)}\tilde{D}$ がわかる．よって (4.43) により，

$$\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu}\mathbf{e}^{w(\mu+\rho)}=(-1)^{\ell(w)}\sum_{\mu\in\Gamma}p_{\mu}\mathbf{e}^{\mu+\rho}\qquad(w\in W)$$

が成り立つ．$\tilde{\Gamma}=\Gamma+\rho$ とおいて書き直すと，

$$\sum_{\mu\in\tilde{\Gamma}}p_{\mu-\rho}\mathbf{e}^{w\mu}=(-1)^{\ell(w)}\sum_{\mu\in\tilde{\Gamma}}p_{\mu-\rho}\mathbf{e}^{\mu}\qquad(w\in W) \tag{4.44}$$

となる．

$\mu\in\tilde{\Gamma}$ について $p_{\mu-\rho}\neq 0$ となっているとする．$w\in W$ とするとき，(4.44) により $w\mu\in\tilde{\Gamma}$ で $p_{w\mu-\rho}=(-1)^{\ell(w)}p_{\mu-\rho}$ が成立する．特に，任意の $w\in W$ に対して $w\mu\leqq\lambda+\rho$ が成り立つ．したがって，集合 $W\mu$ は標準半順序に関する極大元 ν を含む．$\lambda\in P$ と $\nu\leqq\lambda+\rho$ により $\nu\in P$ がわかる．すなわち，任意の $i\in I$ に関して $\nu(h_i)\in\mathbf{Z}$ が成り立つ．また $s_i\nu=\nu-\nu(h_i)\alpha_i$ と ν の極大性により，さらに $\nu(h_i)\in\mathbf{Z}_{\geqq 0}$ である．よって $\nu\in P^{+}$ である．したがって，

$$\tilde{\Gamma}_0=\{\mu\in\tilde{\Gamma}|p_{\mu-\rho}\neq 0\}$$

とおくと，$\tilde{\Gamma}_0 = W(\tilde{\Gamma}_0 \cap P^+)$ で，しかも

$$p_{w\mu-\rho} = (-1)^{\ell(w)} p_{\mu-\rho} \qquad (\mu \in \tilde{\Gamma}_0, w \in W) \tag{4.45}$$

が成り立つ．

以下，$\mathfrak{g}$ が有限次元の場合と全く同様の議論により，$\tilde{\Gamma}_0 \cap P^+ = \{\lambda+\rho\}$，$\tilde{\Gamma}_0 = W(\lambda+\rho)$ でしかも $p_{w(\lambda+\rho)-\rho} = (-1)^{\ell(w)}$ となることがわかり，定理 4.23 の証明が完了する（詳細は読者に委ねる）．∎

ノート

ループ代数の中心拡大の記述（定理 4.20）を用いる定理 4.21 の証明は，山根宏之氏に示唆されたものである．また，定理 4.20 の証明は，Wilson[49] によるものである．

5

量子群

対称化可能カルタン行列に付随するカッツ・ムーディ・リー代数の包絡代数の q 類似として，量子群を導入する．これは，カッツ・ムーディ・リー代数の生成元と基本関係式による表示を変形することにより得られるのであるが，実際に q 類似と呼ぶにふさわしい性質をもつことを示す．特に，可積分最高ウェイト加群の理論が，カッツ・ムーディ・リー代数の場合と全く並行的に成立し，ワイル・カッツの指標公式がそのまま成り立つことを示す．

1. 量子群

対称化可能なカルタン行列に対応するカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ は $\mathbf{K}$ 上の結合代数であるが，その q 類似として $\mathbf{K}(q)$ 上の結合代数 $U_q(\mathfrak{g})$ を 構成する．

5.1 ［定義］　$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能なカルタン行列とする．

- A をカルタン行列にもつ基本ルート・データ $\Phi=(\mathfrak{h},\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I})$,
- $E=\sum_{i\in I}\mathbf{K}\alpha_i$ 上の標準形式 $(\ ,\ ):E\times E\to\mathbf{K}$,
- $\mathfrak{h}$ の格子 $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$

からなる 3 つ組 $(\Phi,(\ ,\ ),\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ に関して以下の条件が成立しているとき，これを，A をカルタン行列にもつ**整基本ルート・データ**と呼ぶ．

(a) $\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}\in\mathbf{Z}\qquad(i\in I)$,

(b) $\alpha_i(\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})\subset\mathbf{Z}\qquad(i\in I)$,

(c) $t_i := \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}h_i \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}} \qquad (i \in I)$.

$((\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I}), (\ ,\ ), \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ が整基本ルート・データならば，$i, j \in I$ に関して，$(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{(\alpha_j,\alpha_j)}{2}\alpha_i(h_j) = \alpha_i(t_j)$ となるので，

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \alpha_i(t_j) = \alpha_j(t_i) \in \mathbf{Z} \qquad (i, j \in I) \tag{5.1}$$

が成り立つ．

5.2 [例]　A が有限型カルタン行列であるとする．この場合，$\mathfrak{h} = \sum_{i\in I}\mathbf{K}h_i$ を満たす基本ルート・データ $\Phi_A = (\mathfrak{h}, \{h_i\}_{i\in I}, \{\alpha_i\}_{i\in I})$ が一意的に定まり，$E = \mathfrak{h}^*$ となる．また E 上の標準形式は非退化である．このとき，整基本ルート・データ

$$\Psi_A = (\Phi_A, (\ ,\ ), \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}) \tag{5.2}$$

が，短ルート α に対して $(\alpha, \alpha) = 2$ となるように $(\ ,\ )$ を正規化し，$(\ ,\ )$ による同一視 $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$ のもとで $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}} = Q$ とすることで，自然に 1 つ定まる．□

5.3 [例]　$\tilde{B}$ を (4.10) により定まるアフィン型カルタン行列とし，命題 4.16 で与えられた基本ルート・データ $\Phi_{\tilde{B}} = (\hat{\mathfrak{h}}, \{\hat{H}_p\}_{p\in\tilde{J}}, \{\hat{\beta}_p\}_{p\in\tilde{J}})$ を考える．以下，記号は第 4 章 1 節に従う．特に，$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}(0) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$ で，$\Phi_B = (\mathfrak{h}(0), \{H_p\}_{p\in J}, \{\beta_p\}_{p\in J})$ は有限型カルタン行列 B に付随する基本ルート・データになっており，$\delta(\mathfrak{h}(0) \oplus \mathbf{K}c) = \{0\}$, $\delta(d) = 1$ により定まる $\delta \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ に関して

$$\hat{H}_p = \begin{cases} H_p & (p \in J) \\ H_0 + \frac{2}{(\beta_0,\beta_0)}c & (p = 0), \end{cases} \qquad \hat{\beta}_p = \begin{cases} \beta_p & (p \in J) \\ \beta_0 + \delta & (p = 0) \end{cases}$$

が成り立っているのであった．さらに $\tilde{E} = \sum_{p\in\tilde{J}}\mathbf{K}\hat{\beta}_p = \mathfrak{h}(0)^* \oplus \mathbf{K}\delta$ 上の標準形式は，$E = \sum_{p\in J}\mathbf{K}\beta_p = \mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準形式を用いて

$$(x_1 + c_1\delta, x_2 + c_2\delta) = (x_1, x_2) \qquad (x_1, x_2 \in E, c_1, c_2 \in \mathbf{K})$$

と書けるのであった．Φ_B から定まるルートの集合を $\tilde{\Delta} \subset \mathfrak{h}(0)^*$ とする．$\beta \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ に対して $(\beta, \beta) = 2$ となるように $\mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準形式を正規化することにより $\tilde{E}$ 上の標準形式を定める．このとき，命題 A.11 により，任意の $p \in \tilde{J}$

に対して $\frac{(\hat{\beta}_p,\hat{\beta}_p)}{2} \in \mathbf{Z}$ $(p \in \tilde{J})$ が成り立つ．$\mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準形式を用いて $\mathfrak{h}(0)^*$ を $\mathfrak{h}(0)$ と同一視することにする．このとき，

$$t_p = \beta_p \quad (p \in J), \qquad t_0 = \beta_0 + c$$

が成り立つ．よって

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}} = (\bigoplus_{p \in J} \mathbf{Z}\beta_p) \oplus \mathbf{Z}c \oplus \mathbf{Z}d$$

とおくとき，

$$\Psi_{\tilde{B}} = (\Phi_{\tilde{B}}, (\ ,\ ), \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}) \tag{5.3}$$

は，$\tilde{B}$ をカルタン行列にもつ整基本ルート・データとなる．　□

量子群の定義を述べる前に記号の準備をしておこう．整数 m の t 類似 $[m]_t$ を

$$[m]_t = \frac{t^m - t^{-m}}{t - t^{-1}} = \begin{cases} \sum_{p=0}^{m-1} t^{m-1-2p} & (m > 0) \\ 0 & (m = 0) \\ -\sum_{p=0}^{-m-1} t^{-m-1-2p} & (m < 0) \end{cases}$$

により定める．これは t に関する整数係数のローラン多項式（すなわち $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ の元）で，t に 1 を代入すると通常の整数 m と一致する．また非負整数 m に対して，$m!$ の t 類似を，

$$[m]_t! = [m]_t [m-1]_t \cdots [1]_t$$

により定める．さらに，$m \geqq n \geqq 0$ を満たす整数 m, n に対して，2 項係数 $\binom{m}{n}$ の t 類似を

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = \frac{[m]_t!}{[n]_t! [m-n]_t!}$$

で定める．このとき

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_t = 1$$

である．また $0 < n < m$ のとき，

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t = t^n \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix}_t + t^{-m+n} \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_t$$

が成り立つことが容易に確かめられる．よって m に関する帰納法を用いると，$\left[\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix}\right]_t$ が t に関する整数係数のローラン多項式であることも従う．

5.4 [定義]　$\Psi=((\mathfrak{h},\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I}),(\ ,\ ),\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ を，$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ をカルタン行列にもつ整基本ルート・データとする．生成系 $\{K^h\}_{h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}}\cup\{E_i,F_i\}_{i\in I}$ に関する以下の基本関係式で定義される $\mathbf{K}(q)$ 上の結合代数 U を，Ψ に付随する**量子群**（quantum group，quantized enveloping algebra）と呼ぶ：

$$K^hK^{h'}=K^{h+h'}\qquad (h,h'\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}),\tag{5.4}$$

$$K^0=1,\tag{5.5}$$

$$K^hE_iK^{-h}=q^{\alpha_i(h)}E_i\qquad (h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}},i\in I),\tag{5.6}$$

$$K^hF_iK^{-h}=q^{-\alpha_i(h)}F_i\qquad (h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}},i\in I),\tag{5.7}$$

$$E_iF_j-F_jE_i=\delta_{ij}\frac{K_i-K_i^{-1}}{q_i-q_i^{-1}}\qquad (i,j\in I),\tag{5.8}$$

$$\sum_{p=0}^{1-a_{ij}}(-1)^p\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ p\end{bmatrix}_{q_i}E_i^{1-a_{ij}-p}E_jE_i^p=0\qquad (i,j\in I,\ i\neq j),\tag{5.9}$$

$$\sum_{p=0}^{1-a_{ij}}(-1)^p\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ p\end{bmatrix}_{q_i}F_i^{1-a_{ij}-p}F_jF_i^p=0\qquad (i,j\in I,\ i\neq j).\tag{5.10}$$

ここで $i\in I$ に対して

$$K_i=K^{t_i},\qquad q_i=q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2}$$

とおいた（$t_i=\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}h_i$）．なお，(5.4), (5.5) により，$K^h$ $(h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ は逆元 $(K^h)^{-1}=K^{-h}$ をもつことに注意されたい．

量子群 U は，次の意味で $\Phi=(\mathfrak{h},\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I})$ に付随するカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\max}(\Phi)$ の q 類似であると見なすことができる．$q\to 1$ の極限を考えるのであるが，形式的に

$$q=\exp(\hbar)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hbar^k}{k!},\tag{5.11}$$

$$K^h=\exp(\hbar h)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hbar^kh^k}{k!}\ (h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}),\quad e_i=E_i,\ f_i=F_i\ (i\in I)\tag{5.12}$$

とおいて $\hbar\to 0$ の“極限”を考える．(5.4) は $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ の可換な部分代数であるという条件に対応している．(5.5) は (5.12) から当然成り立つべきことである．

(5.6), (5.7) に (5.11), (5.12) を代入して $\hbar$ に関して展開し，両辺の $\hbar$ の係数を比べると，$he_i - e_ih = \alpha_i(h)e_i, hf_i - f_ih = -\alpha_i(h)f_i$ が得られる（両辺の定数項は一致している）．逆に $he_i - e_ih = \alpha_i(h)e_i, hf_i - f_ih = -\alpha_i(h)f_i$ ならば，(5.6), (5.7) が（(5.11), (5.12) のもとで）成立していることは容易に確かめることができる．したがって (5.6), (5.7) は，それぞれ

$$he_i - e_ih = \alpha_i(h)e_i, \quad hf_i - f_ih = -\alpha_i(h)f_i$$

と同等な関係式である．(5.8) に (5.11), (5.12) を代入すると，

$$e_if_j - f_je_i = \delta_{ij}\frac{\sinh(\hbar\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}h_i)}{\sinh(\hbar\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2})}$$
$$\left(\sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

を得る．したがって $\hbar \to 0$ の極限では，$e_if_j - f_je_i = \delta_{ij}h_i$ が成り立つ．また (5.9) に (5.11), (5.12) を代入した式において $\hbar \to 0$ の極限を考えると，$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_t$ が $\binom{m}{n}$ の t 類似であることから，

$$\sum_{p=0}^{1-a_{ij}}(-1)^p\binom{1-a_{ij}}{p}e_i^{1-a_{ij}-p}e_je_i^p = 0$$

を得る．$(\mathrm{ad}(x))(y) = xy - yx$ という記法のもとで，これは $\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0$ と書き直すことができる．同様に，(5.10) の極限を考えて $\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$ を得る．

以上はあくまで形式的な計算であるが，量子群 U の定義関係式が，対応するカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}$ の包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の定義関係式の q 類似になっていることを納得されたであろう．そこで，この量子群 U を $U(\mathfrak{g})$ の q 類似という意味を込めて，$U_q(\mathfrak{g})$ で表す．

なお，上の形式的計算に実質的な意味をもたせるには，ドリンフェルト流に，ベキ級数体 $\mathbf{K}[[\hbar]]$ 上で定義された“量子群”を考えればよいのだが，本書ではその詳細は略す（定義 5.4 で述べたのは，神保による量子群の定義である）．

5.5 [例]　A を有限型カルタン行列とし，例 5.2 で与えた $\Psi_A = (\Phi_A, (\ ,\ ), \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ に関して $U_q(\mathfrak{g})$ を考える．この場合，$\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ は $Q = \sum_{i\in I}\mathbf{Z}\alpha_i$ と同一視されるの

であった．この同一視の元で $t_i \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ は α_i に対応するので，一般の $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ に対する K^h は $\{K_i, K_i^{-1}\}_{i\in I}$ を用いて書けてしまう．したがって，$U_q(\mathfrak{g})$ は，生成系 $\{K_i, K_i^{-1}, E_i, F_i\}_{i\in I}$ に関する関係式

$$K_iK_j = K_jK_i, \qquad (i,j \in I), \tag{5.13}$$

$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \qquad (i \in I), \tag{5.14}$$

$$K_jE_iK_j^{-1} = q^{(\alpha_i,\alpha_j)}E_i \qquad (i,j \in I), \tag{5.15}$$

$$K_jF_iK_j^{-1} = q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}F_i \qquad (i,j \in I) \tag{5.16}$$

および (5.8), (5.9), (5.10) で定義される $\mathbf{K}(q)$ 上の結合代数であるということができる（この場合はこのほうが自然である）．

特に A が (A_1) 型のカルタン行列の場合（したがって $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ のとき），対応する量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は，生成系 $\{K, K^{-1}, E, F\}$ に関する関係式

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \qquad KEK^{-1} = q^2E, \qquad KFK^{-1} = q^{-2}F,$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

で定義される $\mathbf{K}(q)$ 上の結合代数である．□

5.6 [問題]　例 5.5 の主張を示せ．また，例 5.3 で述べられたアフィン型カルタン行列の場合に，同様のことを試みよ．

今後この章では，対応するカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}_{\max}, \mathfrak{g}_{\min}$ に関して以下の 2 条件が成り立っている場合にのみ，量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ を考える[1]：

$$\mathfrak{g}_{\max} \cong \mathfrak{g}_{\min}, \tag{5.17}$$

$$\mathfrak{g}(= \mathfrak{g}_{\max} = \mathfrak{g}_{\min})\ \text{上に非退化な標準不変形式が存在する．} \tag{5.18}$$

$U_q(\mathfrak{g})$ の部分（結合）代数 $U_q(\mathfrak{h}), U_q(\mathfrak{n}^{\pm})$ を

$$U_q(\mathfrak{h}) = \langle K^h \rangle_{h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}}, \quad U_q(\mathfrak{n}^+) = \langle E_i \rangle_{i\in I}, \quad U_q(\mathfrak{n}^-) = \langle F_i \rangle_{i\in I} \tag{5.19}$$

により定める．また $\gamma \in Q^+ = \sum_{i\in I} \mathbf{Z}_{\geqq 0}\alpha_i$ に対して，単項式 $E_{i_1}\cdots E_{i_r}$ $(F_{i_1}\cdots F_{i_r})$ であって $\sum_{k=1}^r \alpha_{i_k} = \gamma$ となるものの線形結合として書ける元の

[1] 先に述べたように，これらの条件は常に成り立っているのだが，本書ではその証明は，カルタン行列が有限型のときとアフィン型のときにしか与えていない．

全体からなる $U_q(\mathfrak{n}^+)$ $(U_q(\mathfrak{n}^-))$ の有限次元部分空間を，$U_q(\mathfrak{n}^+)_\gamma$ $(U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma})$ で表す．これらは $U(\mathfrak{n}^\pm)$ の部分空間

$$U(\mathfrak{n}^\pm)_{\pm\gamma} = \{x \in U(\mathfrak{n}^\pm) | hx - xh = \pm\gamma(h)x \ (h \in \mathfrak{h})\}$$

の類似物である．

$U(\mathfrak{g})$ の定義関係式を少しひねって新たな結合代数を作るだけなら，いろいろな可能性があるが，勝手に関係式をいじってしまうと，元の $U(\mathfrak{g})$ よりずっと小さなものになったりすることもあり得る．以下に述べる基本構造定理は，標語的な言い方をすれば，「$U_q(\mathfrak{g})$ が $U(\mathfrak{g})$ と同じサイズである」ということを述べており，その意味でも $U_q(\mathfrak{g})$ が $U(\mathfrak{g})$ の q 類似と呼ぶにふさわしいものであることを示している．

5.7 ［定理］

(i) 線形写像 $U_q(\mathfrak{n}^-) \otimes_{\mathbf{K}(q)} U_q(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{K}(q)} U_q(\mathfrak{n}^+) \to U_q(\mathfrak{g})$ $(y \otimes t \otimes x \mapsto ytx)$ は線形同型写像である．

(ii) $\{K^h | h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Z}\}$ は $U_q(\mathfrak{h})$ のベクトル空間としての基底である．したがって $U_q(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}_\mathbf{Z}$ の $\mathbf{K}(q)$ 上の群代数と同型である．

(iii) $U_q(\mathfrak{n}^+)$ は $\{E_i\}_{i \in I}$ により生成される結合代数として，(5.9) を基本関係式にもつ．また $U_q(\mathfrak{n}^+) = \bigoplus_{\gamma \in Q^+} U_q(\mathfrak{n}^+)_\gamma$ で

$$\dim_{\mathbf{K}(q)} U_q(\mathfrak{n}^+)_\gamma = \dim_\mathbf{K} U(\mathfrak{n}^+)_\gamma \quad (\gamma \in Q^+).$$

(iv) $U_q(\mathfrak{n}^-)$ は $\{F_i\}_{i \in I}$ により生成される結合代数として，(5.10) を基本関係式にもつ．また $U_q(\mathfrak{n}^-) = \bigoplus_{\gamma \in Q^+} U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ で

$$\dim_{\mathbf{K}(q)} U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} = \dim_\mathbf{K} U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} \quad (\gamma \in Q^+).$$

以下，この構造定理の証明を述べる．まず，生成系 $\{K^h\}_{h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Z}} \cup \{E_i, F_i\}_{i \in I}$ に関する基本関係式 (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) で定義される $\mathbf{K}(q)$ 上の結合代数 $\tilde{U}$ を考える．ただし混乱を避けるために $\tilde{U}$ の生成元は $\tilde{K}^h$ $(h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Z})$, $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i$ $(i \in I)$ で表す．また $\tilde{U}$ の部分代数 $\tilde{U}^0, \tilde{U}^+, \tilde{U}^-$ を

$$\tilde{U}^0 = \langle \tilde{K}^h \rangle_{h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Z}}, \quad \tilde{U}^+ = \langle \tilde{E}_i \rangle_{i \in I}, \quad \tilde{U}^- = \langle \tilde{F}_i \rangle_{i \in I}$$

により定める．これに関して次が成り立つ．

5.8 ［補題］

(i) 線形写像 $m : \tilde{U}^- \otimes_{\mathbf{K}(q)} \tilde{U}^0 \otimes_{\mathbf{K}(q)} \tilde{U}^+ \to \tilde{U}$ $(m(y \otimes t \otimes x) = ytx)$ は線形同型写像である．

(ii) $\{\tilde{K}^h | h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}\}$ は $\tilde{U}^0$ のベクトル空間としての基底である．

(iii) $\tilde{U}^+$ は $\{\tilde{E}_i\}_{i \in I}$ により生成される自由結合代数である．すなわち，非可換多項式環 $\mathbf{K}(q)\langle \tilde{E}_i | i \in I \rangle$ と自然に同型である．

(iv) $\tilde{U}^-$ は $\{\tilde{F}_i\}_{i \in I}$ により生成される自由結合代数である．すなわち，非可換多項式環 $\mathbf{K}(q)\langle \tilde{F}_i | i \in I \rangle$ と自然に同型である．

証明　V を，

$$\{y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q} | p, q \geqq 0,\ i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in I,\ h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}\}$$

を基底とする $\mathbf{K}(q)$ 上のベクトル空間とするとき，V 上に $\tilde{U}$ 加群の構造が次で定まる：

$$\tilde{K}^t \cdot y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q} = q^{-\sum_{r=1}^{p} \alpha_{i_r}(t)} y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_{t+h} x_{j_1} \cdots x_{j_q},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_i \cdot y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q} &= q^{-\alpha_i(h)} y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_i x_{j_1} \cdots x_{j_q} \\
&\quad + \sum_{1 \leqq r \leqq p, i_r = i} \frac{q_i^{-\sum_{s=r+1}^{p} \alpha_{i_s}(h_i)}}{q_i - q_i^{-1}} y_{i_1} \cdots \widehat{y}_{i_r} \cdots y_{i_p} m_{t_i + h} x_{j_1} \cdots x_{j_q} \\
&\quad - \sum_{1 \leqq r \leqq p, i_r = i} \frac{q_i^{\sum_{s=r+1}^{p} \alpha_{i_s}(h_i)}}{q_i - q_i^{-1}} y_{i_1} \cdots \widehat{y}_{i_r} \cdots y_{i_p} m_{-t_i + h} x_{j_1} \cdots x_{j_q},
\end{aligned}$$

$$\tilde{F}_i \cdot y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q} = y_i y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q}.$$

これが矛盾なく定まっていることを示すには，$z = y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q}$ に関して

$$\tilde{K}^t \cdot (\tilde{K}^{t'} \cdot z) = \tilde{K}^{t+t'} \cdot z,$$

$$\tilde{K}^0 \cdot z = 1,$$

$$\tilde{K}^t \cdot (\tilde{E}_i \cdot (\tilde{K}^{-t} \cdot z)) = q^{\alpha_i(t)} \tilde{E}_i \cdot z,$$
$$\tilde{K}^t \cdot (\tilde{F}_i \cdot (\tilde{K}^{-t} \cdot z)) = q^{-\alpha_i(t)} \tilde{F}_i \cdot z,$$
$$\tilde{E}_i \cdot (\tilde{F}_j \cdot z) - \tilde{F}_j \cdot (\tilde{E}_i \cdot z) = \delta_{ij} \left(\frac{1}{q_i - q_i^{-1}} \tilde{K}^{t_i} \cdot z - \frac{1}{q_i - q_i^{-1}} \tilde{K}^{-t_i} \cdot z \right)$$

をチェックすればよい．最後の関係式で $i = j$ のときがやや面倒であるが，詳細は読者に委ねる．

このとき

$$\tilde{F}_{i_1} \cdots \tilde{F}_{i_p} \tilde{K}^h \tilde{E}_{j_1} \cdots \tilde{E}_{j_q} \cdot m_0 = y_{i_1} \cdots y_{i_p} m_h x_{j_1} \cdots x_{j_q}$$

が成り立つ．特に $\{\tilde{K}^h \cdot m_0 | h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}\}$，$\{\tilde{E}_{j_1} \cdots \tilde{E}_{j_q} \cdot m_0 | j_1, \ldots, j_q \in I\}$ および $\{\tilde{F}_{i_1} \cdots \tilde{F}_{i_p} \cdot m_0 | i_1, \ldots, i_p \in I\}$ は，それぞれ線形独立な集合である．よって $\{\tilde{K}^h | h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}\}$，$\{\tilde{E}_{j_1} \cdots \tilde{E}_{j_q} | j_1, \ldots, j_q \in I\}$，$\{\tilde{F}_{i_1} \cdots \tilde{F}_{i_p} | i_1, \ldots, i_p \in I\}$ も線形独立な集合となり，これから (ii), (iii), (iv) は明らかである．また $\{\tilde{F}_{i_1} \cdots \tilde{F}_{i_p} \tilde{K}^h \tilde{E}_{j_1} \cdots \tilde{E}_{j_q} \cdot m_0\}$ は線形独立な集合なので，$\{\tilde{F}_{i_1} \cdots \tilde{F}_{i_p} \tilde{K}^h \tilde{E}_{j_1} \cdots \tilde{E}_{j_q}\}$ も線形独立となり，これから (i) における m の単射性も明らかである．よって m の全射性を示せばよい．m の像を $\tilde{U}'$ とおく．$1 \in \tilde{U}'$ なので，任意の $u \in \tilde{U}$ に対して $u\tilde{U}' \subset \tilde{U}'$ を示せばよい（このとき $u \in \tilde{U}$ に対して $u = u1 \in u\tilde{U}' \subset \tilde{U}'$ が成り立つ）．さらに u は $\tilde{U}$ の生成元であるとしてよい．すなわち $u = \tilde{K}^h, \tilde{E}_i, \tilde{F}_i$ の各場合に $u\tilde{U}' \subset \tilde{U}'$ を示せばよい．これは，直接計算で容易に示される（詳細は読者に委ねる）． ∎

$i, j \in I$, $i \neq j$ のとき

$$x_{ij}^{+} = \sum_{p=0}^{1-a_{ij}} (-1)^p \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ p \end{bmatrix}_{q_i} \tilde{E}_i^{1-a_{ij}-p} \tilde{E}_j \tilde{E}_i^p,$$
$$x_{ij}^{-} = \sum_{p=0}^{1-a_{ij}} (-1)^p \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ p \end{bmatrix}_{q_i} \tilde{F}_i^{1-a_{ij}-p} \tilde{F}_j \tilde{F}_i^p$$

とおく．

5.9［補題］　$i, j, k \in I$, $i \neq j$ のとき，$\tilde{F}_k x_{ij}^{+} = x_{ij}^{+} \tilde{F}_k$，$\tilde{E}_k x_{ij}^{-} = x_{ij}^{-} \tilde{E}_k$ が成り立つ．

$k \neq i, j$ のときは明らかであるが，$k = i, k = j$ のときの証明は結構大変である．これも読者に（その腕力に期待して）委ねる．

$\tilde{U}$ の両側イデアル J^+, J^-, J および $\tilde{U}^\pm$ の両側イデアル $L^\pm$ を

$$J^\pm = \sum_{i \neq j} \tilde{U} x_{ij}^\pm \tilde{U}, \qquad J = J^+ + J^-, \qquad L^\pm = \sum_{i \neq j} \tilde{U}^\pm x_{ij}^\pm \tilde{U}^\pm$$

により定める．

5.10 ［補題］　$J^+ = \tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+, \quad J^- = L^- \tilde{U}^0 \tilde{U}^+.$

証明　どちらも同様なので，$J^+ = \tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+$ のみ示す．$\tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+$ が $\tilde{U}$ の両側イデアルであることを示せばよい．補題 5.8(i) により，$\tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+ = \tilde{U}^- \tilde{U}^0 \tilde{U}^+ L^+ = \tilde{U} L^+$ となるので，左イデアルであることは明らかである．よって右イデアルであることを示せばよい．

$$\tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+ \tilde{U} = \tilde{U} L^+ \tilde{U} = \sum_{i \neq j} \tilde{U} x_{ij}^+ \tilde{U} = \sum_{i \neq j} \tilde{U} x_{ij}^+ \tilde{U}^- \tilde{U}^0 \tilde{U}^+$$

であるが，補題 5.9 により，$x_{ij}^+ \tilde{U}^- = \tilde{U}^- x_{ij}^+ \subset \tilde{U} x_{ij}^+$，また容易にわかるように $x_{ij}^+ \tilde{U}^0 = \tilde{U}^0 x_{ij}^+ \subset \tilde{U} x_{ij}^+$ となるので，$\tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+ \tilde{U} = \sum_{i \neq j} \tilde{U} x_{ij}^+ \tilde{U}^+ = \tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+$ となり，したがって $\tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+$ が右イデアルであることもわかった． ∎

さて，自然な全射線形写像

$$\tilde{U}^- \otimes \tilde{U}^0 \otimes \tilde{U}^+ \to (\tilde{U}^- / L^-) \otimes \tilde{U}^0 \otimes (\tilde{U}^+ / L^+) \tag{5.20}$$

の核は，$\tilde{U}^- \otimes \tilde{U}^0 \otimes L^+ + L^- \otimes \tilde{U}^0 \otimes \tilde{U}^+$ と一致する．よって，補題 5.8(i) により，全射線形写像

$$\tilde{U} \to (\tilde{U}^- / L^-) \otimes \tilde{U}^0 \otimes (\tilde{U}^+ / L^+)$$

が定まり，その核は

$$\tilde{U}^- \tilde{U}^0 L^+ + L^- \tilde{U}^0 \tilde{U}^+ = J^+ + J^- = J$$

と一致する．量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は $\tilde{U}/J$ と同一視できるので，線形同型写像

$$U_q(\mathfrak{g}) \to (\tilde{U}^-/L^-) \otimes \tilde{U}^0 \otimes (\tilde{U}^+/L^+)$$

が導かれた．これから，定理 5.7 の主張のうち (i), (ii) および $U_q(\mathfrak{n}^+)$（あるいは $U_q(\mathfrak{n}^+)$）が (5.9)（あるいは (5.10)）を基本関係式にもつことは明らかである．

一方, (2.57) により, $U(\mathfrak{n}^+)$ (あるいは $U(\mathfrak{n}^-)$) は, $\{e_i\}_{i\in I}$ (あるいは $\{f_i\}_{i\in I}$) により生成される $\mathbf{K}$ 上の結合代数として，

$$\sum_{p=0}^{1-a_{ij}} (-1)^p \binom{1-a_{ij}}{p} e_i^{1-a_{ij}-p} e_j e_i^p = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\left(\text{あるいは} \sum_{p=0}^{1-a_{ij}} (-1)^p \binom{1-a_{ij}}{p} f_i^{1-a_{ij}-p} f_j f_i^p = 0 \quad (i \neq j)\right)$$

を基本関係式にもつ．

そこで，次のような一般的状況を考えよう．R が $\mathbf{K}[q,q^{-1}], \mathbf{K}(q), \mathbf{K}$ のいずれかの環のとき，生成系 $\{y_r^R\}_{r=1}^n$ をもつ R 上の自由結合代数を S^R で表す．埋め込み $\mathbf{K}[q,q^{-1}] \to \mathbf{K}(q)$ および特殊化写像 $\mathbf{K}[q,q^{-1}] \to \mathbf{K}$ $(q \to 1)$ により，単射 $\iota : S^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \to S^{\mathbf{K}(q)}$ と全射 $\pi : S^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \to S^{\mathbf{K}}$ が定まる．いま $S^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}$ の元の族

$$z_s^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \in S^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \quad (1 \leqq s \leqq m)$$

が与えられているとし，

$$z_s^{\mathbf{K}(q)} = \iota(z_s^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}), \quad z_s^{\mathbf{K}} = \pi(z_s^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}) \quad (1 \leqq s \leqq m)$$

とおく．$\{z_s^R\}_{s=1}^m$ により生成される S^R の両側イデアルを J^R とし，R 上の結合代数 $\overline{S}^R$ を $\overline{S}^R = S^R/J^R$ により定める．これについて次が成り立つ．

$$\mathbf{K}(q) \otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \cong \overline{S}^{\mathbf{K}(q)}, \quad \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \cong \overline{S}^{\mathbf{K}}. \quad (5.21)$$

実際，$\mathbf{K}$ 上の結合代数の準同型写像 $S^{\mathbf{K}} \to \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}$ $(y_r^{\mathbf{K}} \mapsto 1 \otimes \overline{y_r^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}})$ の核は $J^{\mathbf{K}}$ を含むので, 結合代数の準同型写像 $\varphi : \overline{S}^{\mathbf{K}} \to \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}$ が自然に定まる．また写像 $\mathbf{K} \times \overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \to \overline{S}^{\mathbf{K}}$ $((c, \overline{u}) \mapsto c\overline{\pi(u)})$ が

矛盾なく定まり，これから $\mathbf{K}$ 加群の準同型写像 $\psi : \mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}\overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \to \overline{S}^{\mathbf{K}}$ が定まる．これは明らかに結合代数の準同型写像である．$\varphi\circ\psi$ および $\psi\circ\varphi$ は生成元の上で恒等的なので，ともに恒等写像となり，$\mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}\overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \cong \overline{S}^{\mathbf{K}}$ が示された．$\mathbf{K}(q)\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}\overline{S}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \cong \overline{S}^{\mathbf{K}(q)}$ の証明も全く同様である．

$M = \bigoplus_{r=1}^{n} \mathbf{Z}_{\geqq 0}\epsilon_r$ とおく．$\gamma \in M$ に対して，単項式 $y_{r_1}^R \cdots y_{r_t}^R$ であって $\sum_{k=1}^{t} \epsilon_{r_k} = \gamma$ となるものの線形結合として書ける元の全体からなる S^R の有限次元部分空間を，S_γ^R で表す．このとき明らかに

$$S^R = \bigoplus_{\gamma\in M} S_\gamma^R, \qquad S_{\gamma_1}^R S_{\gamma_2}^R \subset S_{\gamma_1+\gamma_2}^R \ (\gamma_1, \gamma_2 \in M) \tag{5.22}$$

が成り立つ．いま $z_s^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}$ はすべて斉次元であるとする．すなわち $z_s^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \in S_{\gamma_s}^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}$ を満たす $\gamma_s \in M$ $(1 \leqq s \leqq m)$ があるとする．このとき (5.22) により，

$$J^R = \bigoplus_{\gamma\in M} J_\gamma^R, \qquad J_\gamma^R \subset S_\gamma^R$$

が成り立つ．よって $\overline{S}^R$ は

$$\overline{S}^R = \bigoplus_{\gamma\in M} \overline{S}_\gamma^R, \qquad \overline{S}_\gamma^R = S_\gamma^R / J_\gamma^R$$

と直和分解される．また (5.21) により，任意の $\gamma \in M$ に対して

$$\mathbf{K}(q)\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}\overline{S}_\gamma^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \cong \overline{S}_\gamma^{\mathbf{K}(q)}, \quad \mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}\overline{S}_\gamma^{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} \cong \overline{S}_\gamma^{\mathbf{K}}$$

が成り立つ．

5.11 ［補題］　$\gamma \in M$ に対して $\dim_{\mathbf{K}(q)} \overline{S}_\gamma^{\mathbf{K}(q)} \leqq \dim_{\mathbf{K}} \overline{S}_\gamma^{\mathbf{K}}$.

証明　一般に有限生成 $\mathbf{K}[q,q^{-1}]$ 加群 V があるときに，

$$\dim_{\mathbf{K}(q)}(\mathbf{K}(q)\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} V) \leqq \dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} V)$$

を示せばよい．単因子論により，$V = \mathbf{K}[q,q^{-1}]$ あるいは

$$V = \mathbf{K}[q,q^{-1}]/\mathbf{K}[q,q^{-1}]f \qquad (f \in \mathbf{K}[q,q^{-1}] \setminus \{0\})$$

としてよい．$V=\mathbf{K}[q,q^{-1}]$ のときは $\mathbf{K}(q)\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}V=\mathbf{K}(q)$，$\mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}V=\mathbf{K}$ なので明らか．$f\in\mathbf{K}[q,q^{-1}]\backslash\{0\}$ に関して $V=\mathbf{K}[q,q^{-1}]/\mathbf{K}[q,q^{-1}]f$ のときを考える．この場合 f によらずに $\mathbf{K}(q)\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}V=0$ である．一方，$f(1)=0$ ならば $\mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}V=\mathbf{K}$，$f(1)\neq 0$ ならば $\mathbf{K}\otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]}V=0$ となるので，やはり主張は明らかである．　■

補題 5.11 を $U_q(\mathfrak{n}^{\pm}), U(\mathfrak{n}^{\pm})$ に適用して，

$$\dim_{\mathbf{K}(q)}U_q(\mathfrak{n}^{\pm})_{\pm\gamma}\leqq\dim_{\mathbf{K}}U(\mathfrak{n}^{\pm})_{\pm\gamma}\quad(\gamma\in Q^+)\tag{5.23}$$

が得られた．最後に残った逆向きの不等号は次節の末尾で示される．

2. 可積分最高ウェイト表現

$\Psi=((\mathfrak{h},\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I}),(\ ,\ ),\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ を整基本ルート・データとする．また $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ をそのカルタン行列，$U_q(\mathfrak{g})$ を対応する量子群とする．

$\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$ の双対格子 $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*\subset\mathfrak{h}^*$ を

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*|\lambda(\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})\subset\mathbf{Z}\}$$

により定める．

5.12［例］　A を有限型カルタン行列とし，例 5.2 で与えた $\Psi_A=(\Phi_A,(\ ,\ ),\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ を考える．この場合 $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ は

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*|(\lambda,\alpha_i)\in\mathbf{Z}\ (i\in I)\}$$

で与えられる．また $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ は $P=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*|\lambda(h_i)\in\mathbf{Z}\ (i\in I)\}$ を含む．実際，$\lambda\in P$ のとき，$(\lambda,\alpha_i)=\frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}\lambda(h_i)\in\mathbf{Z}$ となるので，$\lambda\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ である．　□

$\lambda\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ に対して，結合代数の準同型写像 $\chi_\lambda:U_q(\mathfrak{h})\to\mathbf{K}(q)$ を

$$\chi_\lambda(K^h)=q^{\lambda(h)}\qquad(h\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$$

により定める．また $U_q(\mathfrak{h})$ 加群 M と $\lambda\in\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ に対して，M の（$\mathbf{K}(q)$ 上のベクトル空間としての）部分空間 M_λ を

$$M_\lambda=\{m\in M|zm=\chi_\lambda(z)m\ (z\in U_q(\mathfrak{h}))\}$$

により定め，これをウェイト λ の**ウェイト空間**と呼ぶ．第1章4節と全く同様にして，λ に関する和 $\sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}} M_\lambda$ は直和であることがわかる．

$U(\mathfrak{g})$ 加群の場合と同様に，ウェイト加群，最高ウェイト加群を以下のように定義する．

5.13［定義］　$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M が以下の条件を満たすとき，これを**ウェイト加群**と呼ぶ：

(i) $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}} M_\lambda$.

(ii) 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に対して $\dim M_\lambda < \infty$.

5.14［定義］　$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M であって，ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ と $m \in M$ に関する以下の条件：

$$m \in M_\lambda \setminus \{0\}, \qquad M = U_q(\mathfrak{g})m, \qquad E_i m = 0\ (i \in I) \tag{5.24}$$

が成り立っているようなもののことを，λ を**最高ウェイト**にもつ**最高ウェイト加群**と呼ぶ．m を M の**最高ウェイト・ベクトル**と呼ぶ

最高ウェイト加群がウェイト加群であることは，$U(\mathfrak{g})$ 加群の場合と全く同様に示される．また $U_q(\mathfrak{g})$ のウェイト加群 M に対しても，その**指標** $\mathrm{ch}(M)$ を

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\mu\in\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}} \dim M_\mu \mathbf{e}^\mu$$

により定める．

$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に対して，$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $M_q(\lambda)$ および $m_{q,\lambda} \in M_q(\lambda)_\lambda$ を

$$M_q(\lambda) = U_q(\mathfrak{g})/(\sum_{z\in U_q(\mathfrak{h})} U_q(\mathfrak{g})(z - \chi_\lambda(z)) + \sum_{i\in I} U_q(\mathfrak{g})E_i),$$

$$m_{q,\lambda} = \overline{1}$$

により定める．$M_q(\lambda)$ を**ヴァーマ加群**と呼ぶ．

5.15［命題］

(i) 線形写像 $U_q(\mathfrak{n}^-) \to M_q(\lambda)\ (u \mapsto u m_{q,\lambda})$ は全単射である．

(ii) $M_q(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である．また $m_{q,\lambda}$ はその最高ウェイト・ベクトルである．

(iii) λ を最高ウェイトにもつ $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト加群は，$M_q(\lambda)$ の商 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群と同型である．

証明　(i) $U_q(\mathfrak{n}^+)$ は $\{E_i\}_{i\in I}$ により生成され，(5.9) を基本関係式とする結合代数だったので，結合代数の準同型写像 $\epsilon : U_q(\mathfrak{n}^+) \to \mathbf{K}(q)$ が $\epsilon(E_i) = 0$ $(i \in I)$ により定まる．

$\{K^h\}_{h\in\mathfrak{h}_\mathbf{Z}} \cup \{E_i\}_{i\in I}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数を $U_q(\mathfrak{b})$ で表す．関係式 (5.6) により，$U_q(\mathfrak{b})$ の任意の元は $K^h x$ $(h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Z}, x \in U_q(\mathfrak{n}^+))$ の形の元の線形結合の形に書けることが容易にわかる．したがって定理 5.7(i) により，$U_q(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{K}(q)} U_q(\mathfrak{n}^+) \to U_q(\mathfrak{b})$ $(t \otimes x \mapsto tx)$ は線形同型写像である．よって，線形写像 $\tilde{\chi}_\lambda : U_q(\mathfrak{b}) \to \mathbf{K}(q)$ が $\tilde{\chi}_\lambda(tx) = \chi_\lambda(t)\epsilon(x)$ により定まるが，(5.6) により，これは結合代数の準同型写像である．よって $U_q(\mathfrak{b}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\chi}_\lambda) \oplus \mathbf{K}(q)1$ である．したがって定理 5.7(i) により，

$$\begin{aligned} U_q(\mathfrak{g}) &= U_q(\mathfrak{n}^-)U_q(\mathfrak{b}) = U_q(\mathfrak{n}^-)\,\mathrm{Ker}(\tilde{\chi}_\lambda) \oplus U_q(\mathfrak{n}^-) \\ &= U_q(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}(\tilde{\chi}_\lambda) \oplus U_q(\mathfrak{n}^-) \end{aligned}$$

となる．一方

$$U_q(\mathfrak{g})\,\mathrm{Ker}(\tilde{\chi}_\lambda) = \sum_{z\in U_q(\mathfrak{h})} U_q(\mathfrak{g})(z - \chi_\lambda(z)) + \sum_{i\in I} U_q(\mathfrak{g})E_i$$

が容易にわかり，したがって主張が成り立つ．

(ii), (iii) の証明は，命題 2.59(ii), (iii) の証明と全く同様である．　∎

補題 2.60 と全く同様にして，任意の最高ウェイト加群は最大真部分加群をもつことがわかる．$M_q(\lambda)$ の最大真部分加群を $K_q(\lambda)$ とし，

$$L_q(\lambda) = M_q(\lambda)/K_q(\lambda), \qquad \ell_{q,\lambda} = \overline{m_{q,\lambda}} \in L_q(\lambda)$$

とおく．このとき明らかに，$L_q(\lambda)$ は λ を最高ウェイトにもつ既約な最高ウェイト加群で，$\ell_{q,\lambda}$ はその最高ウェイト・ベクトルである．命題 2.61 と全く同様

にして，λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群は $L_q(\lambda)$ と同型であることがわかる．

しばらく $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現について考える．$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ は生成系 $\{K, K^{-1}, E, F\}$ に関する関係式

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \qquad KEK^{-1} = q^2E, \qquad KFK^{-1} = q^{-2}F,$$
$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

で定義される $\mathbf{K}(q)$ 上の結合代数である．

5.16［注意］　$\mathbf{K}(q)$ を含む体 $\mathbf{F}$ があるとき，以下の議論は，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ をその係数拡大 $\mathbf{F} \otimes_{\mathbf{K}} U_q(\mathfrak{sl}_2)$ で置き換えても，全く同様である．

定理 5.7 により，

$$\{F^k K^\ell E^m | k, m \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}, \ell \in \mathbf{Z}\}$$

は $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の $\mathbf{K}(q)$ 上の基底になる．また $\mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ は $\mathbf{Z}$ と同一視され，$n \in \mathbf{Z}$ に対して $\chi_n(K) = q^n$ となる．したがって，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群 M に対して $n \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^* = \mathbf{Z}$ に関するウェイト空間 M_n は，$M_n = \{m \in M | Km = q^n m\}$ により与えられる．

$n \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ に対して $(n+1)$ 次元 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群 $V(n)$ が，

$$V(n) = \bigoplus_{m=0}^{n} \mathbf{K}(q) v_m,$$
$$Kv_m = q^{n-2m} v_m, \qquad K^{-1} v_m = q^{-(n-2m)} v_m,$$
$$Ev_m = [n-m+1]_q v_{m-1}, \qquad Fv_m = [m+1]_q v_{m+1}$$

により定まることが，必要な関係式をチェックすることによりわかる．ただし $v_{-1} = v_{n+1} = 0$ とする．これは明らかに n を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群である．また例 1.45 と全く同様にして，既約な $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群であることもわかる．

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ のウェイト加群に対して補題 1.60 の類似が成り立ち，これを用いて次の定理 1.62 の類似を示すことができる．

5.17［定理］　M を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の既約な有限次元ウェイト加群とする．このとき，ある非負整数 n に対して $M \cong V(n)$ となる．

また (1.21) の Ω の代わりに $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の中心の元

$$\Omega_q = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2}$$

を用いて，次の定理 1.65 の類似を示すことができる．

5.18［定理］　$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の有限次元ウェイト加群は，既約な有限次元ウェイト加群の直和である．

5.19［注意］　$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群 M があるとき，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用をその自己同型

$$\omega(K) = -K, \quad \omega(K^{-1}) = -K^{-1}, \quad \omega(E) = -E, \quad \omega(F) = F$$

によりひねって，新たな $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群 M^ω を

$$\mathbf{K}(q)\text{ 加群として } M^\omega \cong M \quad (m^\omega \leftrightarrow m),$$
$$um^\omega = (\omega(u)m)^\omega \qquad (u \in U_q(\mathfrak{sl}_2))$$

により定めることができる．任意の有限次元既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群は，ある非負整数 n に対する $V(n)$ あるいは $V(n)^\omega$ のいずれかと同型であり，また任意の有限次元 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群は，既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群の直和と同型であることを証明することができる．

5.20［問題］　指数関数 $\exp(x)$ の q 類似を

$$\exp_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2}}{[k]_q!} x^k \in \mathbf{K}(q)[[x]]$$

により定める．このとき，$\exp_q(x)^{-1} = \exp_{q^{-1}}(-x)$ を示せ．

5.21［問題］　$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元ウェイト加群 M に対して，M の線形変換 φ, τ を

$$\varphi(m) = q^{-n(n+1)/2} m \quad (m \in M_n)$$
$$\tau = \varphi \exp_q(q^{-1}KE) \exp_q(-F) \exp_q(qK^{-1}E)$$

により定める．このとき $\tau(M_n) = M_{-n}$ を示せ．

5.22 [問題]　$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の自己同型 τ が

$$\tau(K^{\pm 1}) = K^{\mp 1}, \qquad \tau(E) = -K^{-1}F, \qquad \tau(F) = -EK$$

により定まることを示せ．

5.23 [問題]　問題 5.21，問題 5.22 の τ に関して，

$$\tau(um) = \tau(u)\tau(m) \qquad (u \in U_q(\mathfrak{sl}_2), m \in M)$$

が成り立つことを示せ．ただし M は有限次元ウェイト加群とする．

一般の $U_q(\mathfrak{g})$ に戻ろう．$i \in I$ に対して，$\{K_i^{\pm 1}, E_i, F_i\}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数を $U_q(\mathfrak{a}_i)$ で表す．関係式

$$K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \qquad K_iE_iK_i^{-1} = q_i^2E_i, \qquad K_iF_iK_i^{-1} = q_i^{-2}F_i,$$
$$E_iF_i - F_iE_i = \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$$

が成り立っているので，結合代数の準同型写像

$$\varphi_i : \mathbf{K}(q) \otimes_{\mathbf{K}(q_i)} U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2) \to U_q(\mathfrak{a}_i) \tag{5.25}$$

が

$$K^{\pm 1} \mapsto K_i^{\pm 1}, \quad E \mapsto E_i, \quad F \mapsto F_i$$

により定まる．よって $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M は，φ_i により $\mathbf{K}(q) \otimes_{\mathbf{K}(q_i)} U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ 加群と見なせる．また M が $U_q(\mathfrak{g})$ のウェイト加群のときには，$\mathbf{K}(q) \otimes_{\mathbf{K}(q_i)} U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ 加群としてもウェイト加群になっている．

5.24 [定義]　$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M が，ウェイト加群であって，さらに，任意の $i \in I$ と $m \in M$ に対して $\dim U_q(\mathfrak{a}_i)m < \infty$ が成り立つとき，M を**可積分** $U_q(\mathfrak{g})$ 加群と呼ぶ．

命題 2.62，命題 2.63，系 2.64 と全く同様にして，以下の事実が示される．

5.25 [命題]　$\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}^*$ と $i \in I$ に関して $\lambda(h_i)$ が非負整数であるとする．このとき $F_i^{\lambda(h_i)+1}m_{q,\lambda}$ は $M_q(\lambda)$ の最大真部分加群 $K_q(\lambda)$ に含まれる．言い換えると，$L_q(\lambda)$ において $F_i^{\lambda(h_i)+1}\ell_{q,\lambda} = 0$ が成立する．

5.26 [命題]　M を，$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ を最高ウェイトにもつ最高ウェイト加群とし，$\hat{m}$ をその最高ウェイト・ベクトルとする．M が可積分であるための必要十分条件は，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負整数でかつ $F_i^{\lambda(h_i)+1}\hat{m} = 0$ となることである．

5.27 [系]　$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に関して，$L_q(\lambda)$ が可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群になるための必要十分条件は，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i)$ が非負の整数になることである．

$U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト加群を $U(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト加群と比較するために，以下のように考える．

M を（$U_q(\mathfrak{g})$ の）最高ウェイト $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ の最高ウェイト加群，$\hat{m}$ をその最高ウェイト・ベクトルとする．M の部分 $\mathbf{K}[q, q^{-1}]$ 加群 M^0 を

$$M^0 = \sum_{0 \leqq r < \infty, i_1, \ldots, i_r \in I} \mathbf{K}[q, q^{-1}] F_{i_1} \cdots F_{i_r} \hat{m}$$

により定める．$\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に対して $M^0_\mu = M^0 \cap M_\mu$ とおくとき，これは有限生成 $\mathbf{K}[q, q^{-1}]$ 加群で，

$$M^0 = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}} M^0_\mu$$

が成り立っている．

5.28 [補題]

(i) $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に対して，M^0_μ は階数 $\dim_{\mathbf{K}(q)} M_\mu$ の自由 $\mathbf{K}[q, q^{-1}]$ 加群である．

(ii) M^0 は E_i および F_i の作用で不変である．

証明　(i)M^0_μ は $\mathbf{K}(q)$ 加群 M_μ に含まれており，しかも M_μ の $\mathbf{K}(q)$ 加群としての生成元を含んでいるので，主張は単因子論により明らかである．

(ii)F_i の作用で不変であることは定義から明らか．$i_1, \ldots, i_r \in I$ に対して

$$\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} F_{i_1} \cdots F_{i_r} \hat{m} = [(\lambda - \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i_k})(h_i)]_{q_i} F_{i_1} \cdots F_{i_r} \hat{m} \tag{5.26}$$

となることが容易にわかり，M^0 は $\frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$ の作用でも不変である．したがって $E_i\hat{m} = 0$ と

$$E_i F_{i_1} \cdots F_{i_r} \hat{m} = F_{i_1} E_i F_{i_2} \cdots F_{i_r} \hat{m} + \delta_{ii_1} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} F_{i_2} \cdots F_{i_r} \hat{m}$$

から，r に関する帰納法を用いて，$E_i F_{i_1} \cdots F_{i_r} \hat{m} \in M^0$ が示される．■

特殊化 $\mathbf{K}[q, q^{-1}] \to \mathbf{K}$ $(q \mapsto 1)$ に関して $\overline{M}^0 = \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} M^0$ とおく．$\overline{M}^0_\mu = \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{K}[q,q^{-1}]} M^0_\mu$ とおくとき，$\overline{M}^0 = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}} \overline{M}^0_\mu$ が成り立つ．また補題 5.28(ii) により，$\mathbf{K}$ 加群 $\overline{M}^0$ の線形変換 $1 \otimes E_i, 1 \otimes F_i$ が定まる．

5.29［補題］

(i) $\overline{M}^0$ は次の作用により $U(\mathfrak{g})$ 加群である：

$$hm = \mu(h)m \quad (h \in \mathfrak{h},\ m \in \overline{M}^0_\mu),$$
$$e_i m = (1 \otimes E_i)(m),\ f_i m = (1 \otimes F_i)(m) \quad (i \in I, m \in \overline{M}^0).$$

(ii) $\overline{M}^0$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群として，最高ウェイト λ の最高ウェイト加群である．また $\mathrm{ch}(\overline{M}^0) = \mathrm{ch}(M)$ が成り立つ．

(iii) M が $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として可積分ならば，$\overline{M}^0$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群として可積分である．

証明　(i) $\mathfrak{g}$ の生成元に関する関係式 (2.48),...,(2.55) が，$\overline{M}^0$ 上の作用に関して成立していることを見ればよい．(2.48),...,(2.50) は明らか．(2.51), (2.52) は，$E_i M_\mu \subset M_{\mu+\alpha_i}, F_i M_\mu \subset M_{\mu-\alpha_i}$ から従う．(2.54), (2.55) は，(5.9), (5.10) から明らか．(2.53) に関しては，$i \neq j$ のときは $E_i F_j = F_j E_i$ から明らか．また $i = j$ のときは (5.26) から容易にわかる．

(ii), (iii) は (i) により明らかである．■

5.30［定理］

(i) M を $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト加群とし，その最高ウェイトを $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ とする．このとき M が可積分であるための必要十分条件は，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ が成立しさらに $M \cong L_q(\lambda)$ となることである．

(ii) $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に関して，$\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ が任意の $i \in I$ に対して成り立っているとする．このとき $\mathrm{ch}(L_q(\lambda)) = \mathrm{ch}(L(\lambda))$ が成り立つ．

証明　$\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ $(i \in I)$ のときに，$L_q(\lambda)$ が可積分であることは既にわかっている（系 5.27）．

逆に M を最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト加群とする．命題 5.26 により $\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ $(i \in I)$ が成り立つ．また補題 5.29 により $\overline{M}^0$ は $U(\mathfrak{g})$ 加群として，最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト加群である．よって定理 4.23 により，$\overline{M}^0 \cong L(\lambda)$ である．いまの議論を $M = L_q(\lambda)$ の場合に適用すると，$\overline{L_q(\lambda)}^0 \cong L(\lambda)$ もわかる．したがって補題 5.29 により，

$$\mathrm{ch}(M) = \mathrm{ch}(\overline{M}^0) = \mathrm{ch}(L_q(\lambda))$$

となる．すなわち，任意の $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に対して $\dim M_\mu = \dim L_q(\lambda)_\mu$ が成り立つ．これは，自然な全射準同型写像 $M \to L_q(\lambda)$ が同型写像であることを意味する．(i) が示された．(ii) も以上の議論から明らかである．　∎

5.31［定理］　カルタン行列 A は有限型であるとし，例 5.2 における $\Psi_A = (\Phi_A, (\ ,\ ), \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}})$ に関して $\mathfrak{g}$ および $U_q(\mathfrak{g})$ を考える．$U_q(\mathfrak{g})$ のウェイト加群 M に関して，次の (a), (b) は同値である．

(a) M は有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群である．

(b) $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ であって，任意の $i \in I$ に対して $\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ となるものが存在して，$M \cong L_q(\lambda)$ が成り立つ．

証明　(b)⇒(a) は定理 5.30 と定理 3.41 により明らか．(a)⇒(b) も定理 3.41 の (a)⇒(b) の証明と全く同様にして示される．　∎

最後に前節で宿題として残っていた，(5.23) の逆向きの不等号の証明を述べよう．対称性により，$\dim_{\mathbf{K}(q)} U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} \geqq \dim_{\mathbf{K}} U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$　$(\gamma \in Q^+)$ のみ示せばよい．一般に M を $U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト加群，$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ をその最高ウェイト，m を最高ウェイト・ベクトルとするとき，

$$M = U_q(\mathfrak{g})m = U_q(\mathfrak{n}^-)U_q(\mathfrak{h})U_q(\mathfrak{n}^+)m = U_q(\mathfrak{n}^-)m$$

が成り立つ．よって $U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}m = M_{\lambda-\gamma}$ となる．したがって $\dim U_q(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma} \geqq \dim M_{\lambda-\gamma}$ が成り立っている．よって，任意の $\gamma \in Q^+$ に対して，$\dim M_{\lambda-\gamma} \geqq \dim U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ を満たす M が存在することを示せばよい．$\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$ $(i \in I)$ を満たす $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ に対する $L_q(\lambda)$ に関して $\dim L_q(\lambda)_{\lambda-\gamma} = \dim L(\lambda)_{\lambda-\gamma}$ となるので（定理 5.30），これを用いる．

5.32［補題］　$\gamma = \sum_{i\in I} m_i\alpha_i \in Q^+$ とする．$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ が $\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq m_i}$ $(i \in I)$ を満たすとき，$\dim L(\lambda)_{\lambda-\gamma} = \dim U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ が成り立つ．

証明　命題 2.59(i) により $\dim M(\lambda)_{\lambda-\gamma} = \dim U(\mathfrak{n}^-)_{-\gamma}$ である．したがって $K(\lambda) \cap M(\lambda)_{\lambda-\gamma} = \{0\}$ を示せばよい．定理 4.23(ii) により，$K(\lambda)$ のウェイトは，$\bigcup_{i\in I}(\lambda - (\lambda(h_i)+1)\alpha_i - Q^+)$ に含まれる．よって γ に関する仮定から主張は明らかである．∎

よって (5.23) の逆向きの不等号を示すには，任意の $\gamma = \sum_{i\in I} m_i\alpha_i \in Q^+$ に対して，$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ であって $\lambda(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq m_i}$ $(i \in I)$ となるものが存在することをいえばよい．すなわち，$\lambda(t_i) \in \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{2}\mathbf{Z}_{\geqq m_i}$ $(i \in I)$ を満たす $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}}$ の存在を示せばよいが，これは $\{t_i\}_{i\in I}$ の線形独立性から明らかである．以上により，定理 5.7 の証明も完了した．

ノート

量子群は，1980 年代半ばにドリンフェルトと神保により独立に導入された (Drinfeld[7], Jimbo[16])．既に，Chari-Pressley[4], Jantzen[15], 神保 [17], Joseph[18], Hong-Kang[11], Kassel[28], Lusztig[34] など，それなりに特徴のある教科書が現れている．本章の叙述は，ところどころ計算を省いたりして駆け足になってしまったが，必要に応じてこれらの教科書を参考にして補ってほしい．

付録 A

本文補遺

前半では，有限型およびアフィン型カルタン行列の分類定理の証明を述べる．また後半では，ディンキン図形の自己同型から定まる，有限次元単純リー代数の自己同型写像の基本的性質について述べる．これらは本文中で予告されていた結果であるが，やや本筋から離れた独立した話題なので，ここにまとめた．

1．正値性をもつカルタン行列の分類

この節では，定理 3.9，定理 4.15 の証明を述べる．

まず，ディンキン図形が図 3.2 のいずれかとなるカルタン行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ が有限型であることを示そう．正定値な内積 $(\ ,\ )$ をもつ実ベクトル空間 $E_{\mathbf{R}}$ とその基底 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ であって，$(\alpha_i,\alpha_j)=d_ia_{ij}$ を満たすものを具体的に構成してしまえばよい（$\{d_i\}_{i\in I}$ は正の有理数の族で $d_ia_{ij}=d_ja_{ji}$ を満たすもの）．それは次のようにすればよいことが，場合ごとの直接計算で容易に確かめられる（詳細は読者に委ねる）．なお，以下の記述において，$\mathbf{R}^n$ の標準基底を $\{e_i\}_{i=1}^n$ とし，$\mathbf{R}^n$ 上の正定値内積は $(e_i,e_j)=\delta_{ij}$ により定めるものとする．

$$(\mathrm{A}_\ell): E_{\mathbf{R}}=\{\sum_{i=1}^{\ell+1}c_ie_i\in\mathbf{R}^{\ell+1}|\sum_{i=1}^{\ell+1}c_i=0\},$$

$$\alpha_i=e_i-e_{i+1}\quad(1\leqq i\leqq\ell),$$

$$(\mathrm{B}_\ell): E_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}^\ell,\qquad \alpha_i=e_i-e_{i+1}\quad(1\leqq i\leqq\ell-1),\quad \alpha_\ell=e_\ell,$$

$$(\mathrm{C}_\ell): E_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}^\ell,\qquad \alpha_i=e_i-e_{i+1}\quad(1\leqq i\leqq\ell-1),\quad \alpha_\ell=2e_\ell,$$

$$(\mathrm{D}_\ell): E_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}^\ell,\qquad \alpha_i=e_i-e_{i+1}\quad(1\leqq i\leqq\ell-1),\quad \alpha_\ell=e_{\ell-1}+e_\ell,$$

$$(\mathrm{F}_4): E_{\mathbf{R}}=\mathbf{R}^4,$$

$$\alpha_1 = e_2 - e_3,\ \alpha_2 = e_3 - e_4,\ \alpha_3 = e_4,$$

$$\alpha_4 = (e_1 - e_2 - e_3 - e_4)/2,$$

$$(\mathrm{G}_2) : E_{\mathbf{R}} = \{\sum_{i=1}^{3} c_i e_i \in \mathbf{R}^3 | c_1 + c_2 + c_3 = 0\},$$

$$\alpha_1 = e_1 - e_2,\ \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3.$$

また $(\mathrm{E}_6), (\mathrm{E}_7), (\mathrm{E}_8)$ に関しては，$\beta_i \in \mathbf{R}^8$ $(1 \leqq i \leqq 8)$ を

$$\beta_1 = (e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)/2,$$

$$\beta_2 = e_1 + e_2, \quad \beta_3 = e_2 - e_1, \quad \beta_4 = e_3 - e_2, \quad \beta_5 = e_4 - e_3,$$

$$\beta_6 = e_5 - e_4, \quad \beta_7 = e_6 - e_5, \quad \beta_8 = e_7 - e_6$$

により定めるとき，

$$(\mathrm{E}_6) : E_{\mathbf{R}} = \{\sum_{i=1}^{8} c_i e_i \in \mathbf{R}^8 | c_6 = c_7 = -c_8\}, \qquad \alpha_i = \beta_i\ (1 \leqq i \leqq 6),$$

$$(\mathrm{E}_7) : E_{\mathbf{R}} = \{\sum_{i=1}^{8} c_i e_i \in \mathbf{R}^8 | c_7 = -c_8\}, \qquad \alpha_i = \beta_i\ (1 \leqq i \leqq 7),$$

$$(\mathrm{E}_8) : E_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^8, \qquad \alpha_i = \beta_i\ (1 \leqq i \leqq 8).$$

次に，D を図 4.2 に現れる図形とし，ディンキン図形が D となるカルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ がアフィン型であることを示そう．$I' = I \setminus \{0\}$ に対して $A' = (a_{ij})_{i,j \in I'}$ を考えると，これもカルタン行列であるが，そのディンキン図形は，D から頂点 0 および 0 を通る線分をすべて取り去ってできる図形になる．したがって図 4.2 により，A' は有限型カルタン行列であることがわかる．そこで先ほど A' に対して構成した $(E_{\mathbf{R}}, \{\alpha_i\}_{i \in I'})$ をとり，$\tilde{E}_{\mathbf{R}} = E_{\mathbf{R}} \oplus \mathbf{R}\delta$ とおく．また $E_{\mathbf{R}}$ 上の標準形式を拡張して，$\tilde{E}_{\mathbf{R}}$ 上の対称双線形形式を，

$$(\lambda + a\delta, \mu + b\delta) = (\lambda, \mu) \qquad (\lambda, \mu \in E_{\mathbf{R}}, \quad a, b \in \mathbf{R})$$

により定める．このとき明らかに，任意の $\lambda \in \tilde{E}_{\mathbf{R}}$ に対して $(\lambda, \lambda) \geqq 0$ である．ただし $(\delta, \delta) = 0$ なので，$\tilde{E}_{\mathbf{R}}$ 上の双線形形式は正定値ではない．したがって

$\theta \in \tilde{E}_{\mathbf{R}}$ をうまくとって，$\alpha_0 = -\theta + \delta$ とするとき，$\{\alpha_i\}_{i \in I}$ が $\tilde{E}_{\mathbf{R}}$ の基底になり，しかも $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}\ (i, j \in I)$ が成立することを示せばよい（$\{d_i\}_{i \in I}$ は正の有理数の族で $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ を満たすもの）．θ をどのようにとっても，$\{\alpha_i\}_{i \in I}$ は明らかに $\tilde{E}_{\mathbf{R}}$ の基底になる．また $i, j \in I'$ のときに $(\alpha_i, \alpha_j) = d_i a_{ij}$ が成立していることは既にわかっている．したがって，$(\alpha_0, \alpha_j) = d_0 a_{0j}\ (j \in I)$ が成り立つかどうかだけが問題となる．実際，θ は以下のようにとればよいことが，場合ごとの直接計算で容易に確かめられる（詳細は読者に委ねる）．

$(\mathrm{A}_\ell^{(1)}) : \theta = e_1 - e_{\ell+1},$

$(\mathrm{B}_\ell^{(1)}) : \theta = e_1 + e_2,$

$(\mathrm{C}_\ell^{(1)}) : \theta = 2e_1,$

$(\mathrm{D}_\ell^{(1)}) : \theta = e_1 + e_2,$

$$(\mathrm{E}_6^{(1)}) : \theta = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5} e_i - e_6 - e_7 + e_8\right),$$

$(\mathrm{E}_7^{(1)}) : \theta = e_8 - e_7,$

$(\mathrm{E}_8^{(1)}) : \theta = e_7 + e_8,$

$(\mathrm{F}_4^{(1)}) : \theta = e_1 + e_2,$

$(\mathrm{G}_2^{(1)}) : \theta = -e_1 - e_2 + 2e_3,$

$(\mathrm{A}_{2\ell}^{(2)}) : \theta = 2e_1,$

$(\mathrm{A}_{2\ell-1}^{(2)}) : \theta = e_1 + e_2,$

$(\mathrm{D}_{\ell+1}^{(2)}) : \theta = e_1,$

$(\mathrm{E}_6^{(2)}) : \theta = e_1,$

$(\mathrm{D}_4^{(3)}) : \theta = -e_2 + e_3.$

有限型（アフィン型）カルタン行列のディンキン図形が図 3.2（図 4.2）のいずれかの図形と一致することを示すために，少し一般的考察を行う．

以下の事実は，線形代数の基本事項の 1 つとしてよく知られていることであるが，念のために証明を与えておく．

A.1 [補題]　V を実数体 $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，$f : V \times V \to \mathbf{R}$ を V 上の正値対称双線形形式とする．このとき $v \in V$ に対して

$$f(v, v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(v, V) = \{0\}.$$

証明　$(\Longleftarrow)$ は明らかなので $(\Longrightarrow)$ を示せばよい．$f(v, V) \neq \{0\}$ とすると，$f(v, v') \neq 0$ となる $v' \in V$ がとれる．必要ならば v' を $-v'$ で置き換えて

$f(v, v') > 0$ としておいてよい．このとき $\epsilon > 0$ に対して

$$f(v - \epsilon v', v - \epsilon v') = \epsilon(\epsilon f(v', v') - 2f(v, v'))$$

となるが，ϵ が十分小さいときにはこれは負になってしまい f の正値性に矛盾する．これで ($\Longrightarrow$) も示された．∎

$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能カルタン行列，$(E_{\mathbf{R}}, \{\alpha_i\}_{i\in I}, (\ ,\ ))$ を A に付随する基本ルート系とする．各 $i \in I$ に対して α_i を正規化して

$$v_i = \alpha_i / \sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

とおく．$\{v_i\}_{i\in I}$ は $E_{\mathbf{R}}$ の基底である．この基底に関して $\lambda, \mu \in E_{\mathbf{R}}$ を $\lambda = \sum_{i\in I} p_i v_i$, $\mu = \sum_{i\in I} q_i v_i$ と展開するとき，

$$\begin{aligned}
(\lambda, \mu) &= \sum_{i\in I} p_i q_i - \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \frac{p_i q_j + p_j q_i}{2} \frac{-2(\alpha_i, \alpha_j)}{\sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)}} \\
&= \sum_{i\in I} p_i q_i - \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \frac{p_i q_j + p_j q_i}{2} \sqrt{\frac{-2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}} \sqrt{\frac{-2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}} \\
&= \sum_{i\in I} p_i q_i - \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \sqrt{a_{ij} a_{ji}} \frac{p_i q_j + p_j q_i}{2}
\end{aligned}$$

となる（$i \neq j$ ならば $(\alpha_i, \alpha_j) \leqq 0$ に注意せよ）．特に

$$\Big(\sum_{i\in I} p_i v_i, \sum_{i\in I} p_i v_i\Big) = \sum_{i\in I} p_i^2 - \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \sqrt{a_{ij} a_{ji}} p_i p_j$$

である．したがって，$E_{\mathbf{R}}$ 上の標準形式が正値かどうか，また正定値かどうかは，実は $b_{ij} := a_{ij} a_{ji}$ $(i, j \in I,\ i \neq j)$ のみから決まることである．

そこで一般に，カルタン行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ に対して，I の各元に対応して頂点を白丸で描き，また $i, j \in I$, $i \neq j$ のとき，i に対応する頂点と j に対応する頂点を $b_{ij} (= a_{ij} a_{ji})$ 本の（矢印をもたない）線分で結んでできる図形を，A の**簡易ディンキン図形**と呼ぶことにする．$a_{ij} a_{ji} \leqq 4$ が任意の $i, j \in I$ に対して成り立っているときには，A の簡易ディンキン図形は，図 3.1 の簡易表示を用いたディンキン図形から，矢印を除いたものである．

頂点集合 I をもち，頂点 i と頂点 j が b_{ij} 本の線分で結ばれた図形 D に対して，実ベクトル空間 $\bigoplus_{i\in I}\mathbf{R}v_i$ 上の対称双線形形式 f_D を

$$f_D(\sum_{i\in I}p_iv_i,\sum_{i\in I}q_iv_i)=\sum_{i\in I}p_iq_i-\sum_{\{i,j\}\subset I,i\neq j}\sqrt{b_{ij}}\frac{p_iq_j+p_jq_i}{2} \qquad \text{(A.1)}$$

で定め，これを D に付随する対称双線形形式と呼ぶ．先ほどの考察により，既約対称化可能カルタン行列 A が有限型（アフィン型）になるための必要十分条件は，その簡易ディンキン図形を D とするときに，D に付随する対称双線形形式が正定値（正値かつ非正定値）になることである．

簡易ディンキン図形 D において，その頂点集合の部分集合を頂点集合とし，頂点同士を D におけるよりも少ないかまたは等しい数の線分で結んで得られる図形を，D の部分図形と呼ぶ．

次の事実が有用である．

A.2［補題］　D を有限型カルタン行列の簡易ディンキン図形，D' を D の部分図形とするとき $f_{D'}$ は正定値である．また，D をアフィン型カルタン行列の簡易ディンキン図形，D' を D の真部分図形とする（すなわち D' は D の部分図形で $D'\neq D$）とき $f_{D'}$ は正定値である．

証明　D を有限型あるいはアフィン型カルタン行列の簡易ディンキン図形，D' をその部分図形とし，$f_{D'}$ が正値であることを示そう．D の頂点集合を I とし，$i,j\in I$ $(i\neq j)$ が b_{ij} 本の線分で結ばれているとする．このとき，D' の頂点集合は I のある部分集合 I' と一致し，$i,j\in I'$ $(i\neq j)$ は $0\leqq b'_{ij}\leqq b_{ij}$ を満たす b'_{ij} に関して b'_{ij} 本の線分で結ばれている．また $f_D, f_{D'}$ に関して，

$$f_D(\sum_{i\in I}p_iv_i,\sum_{i\in I}p_iv_i)=\sum_{i\in I}p_i^2-\sum_{\{i,j\}\subset I,i\neq j}\sqrt{b_{ij}}p_ip_j,$$

$$f_{D'}(\sum_{i\in I'}q_iv_i,\sum_{i\in I'}q_iv_i)=\sum_{i\in I'}q_i^2-\sum_{\{i,j\}\subset I',i\neq j}\sqrt{b'_{ij}}q_iq_j$$

が成り立っている．

一般に実数の族 $\{q_i\}_{i\in I'}$ に対して $\{p_i\}_{i\in I}$ を

$$p_i=|q_i|\ (i\in I'),\qquad p_i=0\ (i\notin I') \qquad \text{(A.2)}$$

により定めるとき

$$f_{D'}(\sum_{i\in I'} q_i v_i, \sum_{i\in I'} q_i v_i) \geqq f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, \sum_{i\in I} p_i v_i) \qquad \text{(A.3)}$$

が成り立つ．実際，

$$\begin{aligned} f_{D'}(\sum_{i\in I'} q_i v_i, \sum_{i\in I'} q_i v_i) &= \sum_{i\in I'} q_i^2 - \sum_{\{i,j\}\subset I', i\neq j} \sqrt{b'_{ij}} q_i q_j \\ &\geqq \sum_{i\in I'} |q_i|^2 - \sum_{\{i,j\}\subset I', i\neq j} \sqrt{b_{ij}} |q_i||q_j| \\ &= f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, \sum_{i\in I} p_i v_i) \end{aligned}$$

である．したがって f_D の正値性から $f_{D'}$ の正値性が従う．

D を有限型カルタン行列の簡易ディンキン図形とする．$\sum_{i\in I'} q_i v_i \neq 0$ のとき $\sum_{i\in I} p_i v_i \neq 0$ を (A.2) により定める．このとき，f_D の正定値性と (A.3) により

$$f_{D'}(\sum_{i\in I'} q_i v_i, \sum_{i\in I'} q_i v_i) \geqq f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, \sum_{i\in I} p_i v_i) > 0$$

が成り立つ．したがって $f_{D'}$ が正定値であることがわかった．

以下 D はアフィン型カルタン行列の簡易ディンキン図形とし，$f_{D'}$ が正定値ではないと仮定する．仮定により $f_{D'}(\sum_{i\in I'} q_i v_i, \sum_{i\in I'} q_i v_i) = 0$ となる $\sum_{i\in I'} q_i v_i \neq 0$ がとれる．$\sum_{i\in I} p_i v_i$ を (A.2) により定めると，(A.3) と f_D の正値性により，

$$0 = f_{D'}(\sum_{i\in I'} q_i v_i, \sum_{i\in I'} q_i v_i) \geqq f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, \sum_{i\in I} p_i v_i) \geqq 0.$$

したがって，$f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, \sum_{i\in I} p_i v_i) = 0$ である．

$I_1 = \{i \in I | p_i \neq 0\}$ とおく．$\sum_{i\in I} p_i v_i \neq 0$ なので，$I_1 \neq \emptyset$ である．$I_1 \subsetneqq I$ と仮定する．補題 A.1 により，任意の $j \in I\backslash I_1$ に対して，$f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, v_j) = 0$ が成立する．f_D の定義から

$$0 = f_D(\sum_{i\in I} p_i v_i, v_j) = f_D(\sum_{i\in I_1} p_i v_i, v_j) = -\sum_{i\in I_1} \sqrt{b_{ij}} p_i \qquad (j \in I \setminus I_1)$$

であるが，$p_i > 0$ $(i \in I_1)$ により，

$$b_{ij} = 0 \qquad (i \in I_1,\ j \in I \setminus I_1)$$

でなければならない．これは D において I_1 の元に対応する頂点と $I \setminus I_1$ の元に対応する頂点の間に線分が存在しないことを意味し，D が非連結になってしまうが，D はアフィン型カルタン行列の簡易ディンキン図形なので連結でなくてはならず，矛盾である．よって $I_1 = I$ が成立する．したがって p_i の定義により，$I' = I$ でしかも任意の $i \in I$ について $q_i \neq 0$ が成立する．

そこでもう一度 (A.2) に立ち返ってみよう．

$$
\begin{aligned}
0 = f_{D'}(\sum_{i\in I} q_i v_i, \sum_{i\in I} q_i v_i) &= \sum_{i\in I} q_i^2 - \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \sqrt{b'_{ij}} q_i q_j \\
&\geqq \sum_{i\in I} |q_i|^2 - \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \sqrt{b_{ij}} |q_i||q_j| \\
&= f_D(\sum_{i\in I} |q_i| v_i, \sum_{i\in I} |q_i| v_i) \geqq 0
\end{aligned}
$$

なので

$$
\sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \sqrt{b'_{ij}} q_i q_j = \sum_{\{i,j\}\subset I, i\neq j} \sqrt{b_{ij}} |q_i||q_j|
$$

が成り立っていないといけない．ところが $q_i \neq 0$ $(i \in I)$ と $0 \leqq b'_{ij} \leqq b_{ij}$ $(i, j \in I)$ だったので，結局 $b'_{ij} = b_{ij}$ $(i, j \in I)$ が成立する．これは $D = D'$ を意味する．したがって D' が D の真部分図形ならば $f_{D'}$ は正定値である．　■

$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ が有限型あるいはアフィン型カルタン行列ならば，そのディンキン図形は図 3.2，図 4.2 のいずれかの図形と一致することを見よう．

簡単のため，有限型（アフィン型）カルタン行列の簡易ディンキン図形を，単に有限型（アフィン型）簡易ディンキン図形と呼ぶ．図 3.2（図 4.2）に現れる図形から矢印を除いて得られる図形がすべて有限型（アフィン型）簡易ディンキン図形になることは，既にわかっている．以下図 3.2，図 4.2 のラベルを用いて簡易ディンキン図形に名前をつけて，例えば (A_ℓ) 型簡易ディンキン図形といった呼称を用いることにする．

次は補題 A.2 から明らか．

A.3［系］　有限型あるいはアフィン型の簡易ディンキン図形 D が，アフィン型簡易ディンキン図形 D' を部分図形として含めば，$D = D'$ でなければならない．特に D はアフィン型である．

D を有限型あるいはアフィン型の簡易ディンキン図形とする．

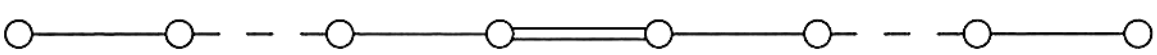
D がサイクルを含むとすると，D は $(\mathrm{A}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形 D' を，その部分図形として含む．$(\mathrm{A}_\ell^{(1)})$ 型カルタン行列はアフィン型なので，系 A.3 により，D は $(\mathrm{A}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形と一致しなければならないことがわかる．そこで，以下 D はサイクルを含まないものと仮定する．

D が 4 重以上の線分を含むとする．D は，$(\mathrm{A}_1^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，系 A.3 により，D 自身が $(\mathrm{A}_1^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．以下 D は 4 重以上の線分を含まないものと仮定する．

D が 3 重線を含むとする．もしも D の頂点の数が 3 以上ならば，D は $(\mathrm{G}_2^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{G}_2^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．また D の頂点が 2 個だけからなるならば，D は (G_2) 型である．以下 D は 3 重以上の線分を含まないものと仮定する．

もしも 2 重線が 2 カ所以上にあるとすると，D は $(\mathrm{C}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{C}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．以下 2 重線は高々 1 カ所にしか現れないものと仮定する．

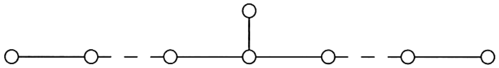
まず D が 2 重線を含む場合を考える．もしも分岐点があるとすると，D は $(\mathrm{B}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{B}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．分岐点を含まない場合には，D は次の形をしている．



2 重線の左と右に，それぞれ p 本および q 本の 1 重線があるとする．$p \geqq q \geqq 0$ としておいてよい．$q \geqq 2$，あるいは $q = 1$ かつ $p \geqq 2$ とすると，D は $(\mathrm{F}_4^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{F}_4^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．またそうでない場合には (F_4) 型，(B_ℓ) 型 $(= (\mathrm{C}_\ell)$ 型$)$ のいずれかの簡易ディンキン図形である．

最後に D が 1 重線のみからなる場合を考える．もしも分岐点が 2 つ以上あるとすると，D は $(\mathrm{D}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{D}_\ell^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．以下 D は分岐点を高々 1 つしか含まないものとする．もしも分岐点が全くなければ，D は (A_ℓ) 型である．したがって分岐点がちょうど 1 つだけの場合を考えればよい．分岐点からでる線

分が4本以上あるとすると，D は $(\mathrm{D}_4^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{D}_4^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．分岐点からでる線分がちょうど3本とする．分岐点からでる線分の長さがすべて2以上とすると，D は $(\mathrm{E}_6^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むので，D 自身が $(\mathrm{E}_6^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形である．分岐点からでる線分のうちの1つはその長さが1であるとする．このとき D は次の形をしているとしてよい．



分岐点の左と右に，それぞれ p 本および q 本の1重線があるとする．$p \geqq q \geqq 1$ としておいてよい．$q \geqq 3$，あるいは $q=2$ かつ $p \geqq 5$ とすると，D は $(\mathrm{E}_7^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形，あるいは $(\mathrm{E}_8^{(1)})$ 型簡易ディンキン図形をその部分図形として含むことになるので，D 自身が $(\mathrm{E}_7^{(1)})$ 型あるいは $(\mathrm{E}_8^{(1)})$ 型の簡易ディンキン図形である．それ以外の場合には (E_6) 型，(E_7) 型，(E_8) 型，(D_ℓ) 型のいずれかになる．

以上により，有限型あるいはアフィン型カルタン行列 A のディンキン図形は図 3.2，図 4.2 のいずれかの図形と一致することがわかった．

これで定理 3.9，定理 4.15 の証明が完了した．

2. ディンキン図形の自己同型

この節の目的は，定理 4.5 および定理 4.6 の証明を述べることである．記号は第4章1節に従うが，簡単に復習しておく．$A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を (X_ℓ) 型の有限型カルタン行列とし，その基本ルート・データ $\Phi_A=(\mathfrak{h},\{h_i\}_{i\in I},\{\alpha_i\}_{i\in I})$ を命題 3.5(ii) のように定める（よって $\mathfrak{h}=\sum_{i\in I}\mathbf{K}h_i, \mathfrak{h}^*=\sum_{i\in I}\mathbf{K}\alpha_i$）．$\sigma: I\to I$ を全単射で $a_{\sigma(i),\sigma(j)}=a_{ij}\ (i,j\in I)$ を満たすものとする．また σ の位数を r とする．$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(\Phi_A)=\langle h_i,e_i,f_i\rangle_{i\in I}$ を A から定まるカッツ・ムーディ・リー代数（すなわち (X_ℓ) 型の有限次元単純リー代数）とし，σ により引き起こされるリー代数 $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を同じ文字 σ で表す．

σ は $\mathfrak{h}$ に作用しているので，その双対空間 $\mathfrak{h}^*$ にも，

$$(\sigma(\lambda))(h)=\lambda(\sigma^{-1}(h)) \qquad (\lambda\in\mathfrak{h}^*, h\in\mathfrak{h})$$

により作用する.

A.4 ［補題］　$i \in I$ とする.

(i) $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$.

(ii) $\sigma s_i \sigma^{-1} = s_{\sigma(i)}$.

証明　(i) $j \in I$ に対して,

$$(\sigma\alpha_i)(h_j) = \alpha_i(\sigma^{-1}h_j) = \alpha_i(h_{\sigma^{-1}(j)}) = a_{\sigma^{-1}(j),i} = a_{j,\sigma(i)} = \alpha_{\sigma(i)}(h_j).$$

よって明らか.

(ii) $j \in I$ に対して,

$$\begin{aligned}(\sigma s_i \sigma^{-1})(\alpha_j) &= (\sigma s_i)(\alpha_{\sigma^{-1}(j)}) = \sigma(\alpha_{\sigma^{-1}(j)} - (\alpha_{\sigma^{-1}(j)})(h_i)\alpha_i) \\ &= \alpha_j - \sigma^{-1}\alpha_j(h_i)\alpha_{\sigma(i)} = \alpha_j - \alpha_j(\sigma h_i)\alpha_{\sigma(i)} \\ &= s_{\sigma(i)}(\alpha_j)\end{aligned}$$

よって明らか. ∎

A.5 ［命題］　$\mathfrak{g}$ のルート系 $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ とワイル群 $W \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ に関して, 次が成り立つ.

(i) $\sigma(\Delta) = \Delta$,　$\sigma(\Delta^{\pm}) = \Delta^{\pm}$.

(ii) $\sigma W \sigma^{-1} = W$.

(iii) $\alpha \in \Delta$ に対して $\sigma(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$.

証明　(ii) は補題 A.4(ii) より明らか.

(i) $w \in W, i \in I$ のとき,

$$\sigma w(\alpha_i) = \sigma w \sigma^{-1}(\alpha_{\sigma(i)}) \in W(\alpha_{\sigma(i)}) \subset \Delta$$

であるが, $\Delta = \bigcup_{i\in I} W(\alpha_i)$ なので, $\sigma(\Delta) = \Delta$ がわかった. また補題 A.4(i) より, $\sigma(\Delta^{\pm}) \subset \Delta \cap (\pm\sum_{i\in I} \mathbf{Z}_{\geqq 0}\alpha_i) = \Delta^{\pm}$ となり, $\sigma(\Delta^{\pm}) = \Delta^{\pm}$ が従う.

(iii) $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ とすると，$h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$[h, \sigma(x)] = \sigma([\sigma^{-1}(h), x]) = \sigma(\alpha(\sigma^{-1}(h))x) = (\sigma(\alpha))(h)\sigma(x)$$

となるので，$\sigma(x) \in \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}$ である． ∎

$\langle\sigma\rangle$ は位数 r の群なので，$\alpha \in \Delta$ を含む $\langle\sigma\rangle$ 軌道の元の数は r の約数である．$r = 1$ ならば（当然ではあるが）$\langle\sigma\rangle$ 軌道はただ 1 つのルートからなる．また $r = 2, 3$ のとき r は素数なので，$\langle\sigma\rangle$ 軌道は，ただ 1 つのルートからなるか，あるいは r 個のルートからなるかのいずれかである．

σ の $\mathfrak{h}$ への作用の固定点のなすベクトル空間を $\mathfrak{h}(0)$ で表す．すなわち，

$$\mathfrak{h}(0) = \{x \in \mathfrak{h} | \sigma(x) = x\}$$

とおく．また，$\mathrm{res} : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}(0)^*$ を自然な制限写像とする．

$h \in \mathfrak{h}(0), \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\mathrm{res}(\sigma(\lambda))(h) = \sigma(\lambda)(h) = \lambda(\sigma^{-1}h) = \lambda(h) = \mathrm{res}(\lambda)(h)$$

となるので，次が成立する

A.6［補題］　$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathrm{res}(\lambda) = \mathrm{res}(\sigma(\lambda))$.

位数 r の群 $\langle\sigma\rangle$ の I への作用に関する軌道の集合を J で表す．$p \in J$ とする．任意の $i, j \in p, i \neq j$ に対して $a_{ij} = 0$ が成り立つ場合には，$p \in J$ は直交条件を満たすということにする．また任意の $p \in J$ が直交条件を満たすとき，σ は直交条件を満たすという．

$\mathfrak{h}(0)$ の元 H_p $(p \in J)$ を

$$H_p = \begin{cases} \sum_{i \in p} h_i & (p \text{ は直交条件を満たす}) \\ 2\sum_{i \in p} h_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定める．このとき $\mathfrak{h}(0)$ は，$\{H_p\}_{p \in J}$ を基底にもつ．

補題 A.6 により，$p \in J$ に対して $\beta_p \in \mathfrak{h}(0)^*$ が，$\beta_p(h) = \alpha_i(h)$ $(h \in \mathfrak{h}(0), i \in p)$ により矛盾なく定まる．

行列 $B=(b_{pq})_{p,q\in J}$ を

$$b_{pq}=\beta_q(H_p)=\begin{cases}\sum_{i\in p}a_{ij} & (p\text{ は直交条件を満たす})\\ 2\sum_{i\in p}a_{ij} & (\text{それ以外})\end{cases}$$

により定める．ただし $j\in q$ とする．

このとき，B は有限型カルタン行列で，$(\mathfrak{h}(0),\{H_p\}_{p\in J},\{\beta_p\}_{p\in J})$ は B をカルタン行列とする基本ルート・データ Φ_B と同型になるのであった（命題 4.4）．

$(\mathfrak{h}(0),\{H_p\}_{p\in J},\{\beta_p\}_{p\in J})$ のワイル群を $\tilde{W}=\langle\tilde{s}_p|p\in J\rangle$ で，またルートの集合を $\tilde{\Delta}$ で表す．すなわち $\tilde{s}_p\in GL(\mathfrak{h}(0)^*)$ を

$$\tilde{s}_p(\mu)=\mu-\mu(H_p)\beta_p \qquad (p\in J,\mu\in\mathfrak{h}(0)^*)$$

により定め，$\tilde{W}=\langle\tilde{s}_p\rangle_{p\in J}$ とおく．また $\tilde{\Delta}=\bigcup_{p\in J}\tilde{W}(\beta_p)$ とする．さらに $\hat{W}=\{w\in W|\sigma w\sigma^{-1}=w\}$ とおく．

A.7 ［命題］　σ が直交条件を満たすとする．

(i) $p\in J$ に対して，$\hat{s}_p\in\hat{W}$ が $\hat{s}_p=\prod_{i\in p}s_i$ により矛盾なく定まり，さらに $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して $(\tilde{s}_p)(\mathrm{res}(\lambda))=\mathrm{res}(\hat{s}_p(\lambda))$.

(ii) $\tilde{\Delta}=\mathrm{res}(\Delta)$.

(iii) $\alpha,\beta\in\Delta$ に対して $\mathrm{res}(\alpha)=\mathrm{res}(\beta)$ が成り立つための必要十分条件は，α と β が同じ $\langle\sigma\rangle$ 軌道に属することである．

証明　(i) p は直交条件を満たしているので，$i,j\in p$, $i\neq j$ のとき $s_i(\alpha_j)=\alpha_j$ が成り立つ．よって $p=\{i_1,\ldots,i_n\}$ とすると，$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ について

$$\begin{aligned}s_{i_1}\cdots s_{i_n}(\lambda)&=s_{i_1}\cdots s_{i_{n-1}}(\lambda-\lambda(h_{i_n})\alpha_{i_n})\\&=s_{i_1}\cdots s_{i_{n-2}}(\lambda-\lambda(h_{i_n})\alpha_{i_n}-\lambda(h_{i_{n-1}})\alpha_{i_{n-1}})\\&=\cdots\\&=\lambda-\sum_{k=1}^{n}\lambda(h_{i_k})\alpha_{i_k}\end{aligned}$$

なので,

$$\mathrm{res}(s_{i_1}\cdots s_{i_n}(\lambda))=\mathrm{res}(\lambda)-\lambda(H_p)\beta_p=\tilde{s}_p(\mathrm{res}(\lambda))$$

となる．また $\hat{s}_p\in\hat{W}$ は $\hat{s}_p$ が s_i $(i\in p)$ の積の順序によらないことと，補題 A.4 から明らかである．

(ii) $\beta\in\tilde{\Delta}$ とする．定義から $\beta=\tilde{s}_{p_1}\cdots\tilde{s}_{p_m}(\mathrm{res}(\alpha_i))$ $(p_i,\ldots,p_m\in J, i\in I)$ と書けるが，$\alpha=\hat{s}_{p_1}\cdots\hat{s}_{p_m}(\alpha_i)\in\Delta$ とおくと，(i) により $\beta=\mathrm{res}(\alpha)$ が成り立つ．$\tilde{\Delta}\subset\mathrm{res}(\Delta)$ が示された．

$\tilde{\Delta}\supset\mathrm{res}(\Delta)$ を示そう．$\alpha\in\Delta$ に対して $\mathrm{res}(\alpha)\in\tilde{\Delta}$ を示せばよい．$\mathrm{res}(-\alpha)=-\mathrm{res}(\alpha)$ なので, $\alpha\in\Delta^+$ としてよい．$\mathrm{ht}(\alpha)$ に関する帰納法を用いる．$\mathrm{ht}(\alpha)=1$ ならば $\alpha=\alpha_i$ と書けるので，$i\in p$ なる $p\in J$ に関して $\mathrm{res}(\alpha)=\beta_p\in\tilde{\Delta}$ である．$\mathrm{ht}(\alpha)>1$ と仮定する．$\alpha=\sum_{i\in I}n_i\alpha_i$ $(n_i\in\mathbf{Z}_{\geqq 0})$ とすると $\mathrm{res}(\alpha)=\sum_{p\in J}m_p\beta_p$ $(m_p=\sum_{i\in p}n_i\in\mathbf{Z}_{\geqq 0})$ と書ける．特に，$\mathrm{res}(\alpha)\in\sum_{p\in J}\mathbf{Z}_{\geqq 0}\beta_p\setminus\{0\}$ である．よって，$\mathfrak{h}(0)^*=\sum_{p\in J}\mathbf{K}\beta_p$ 上の標準形式に関して $(\mathrm{res}(\alpha),\beta_p)\leqq 0$ が任意の $p\in J$ に関して成立していると仮定すると,

$$(\mathrm{res}(\alpha),\mathrm{res}(\alpha))=\sum_{p\in J}m_p(\mathrm{res}(\alpha),\beta_p)\leqq 0$$

となり矛盾が生ずる．したがって $(\mathrm{res}(\alpha),\beta_p)>0$ となる $p\in J$ が存在する．このとき $(\mathrm{res}(\alpha))(H_p)\in\mathbf{Z}_{>0}$ である．$\beta=\hat{s}_p(\alpha)$ とおく．(i) の証明における計算から

$$\beta=\alpha-\sum_{i\in p}\alpha(h_i)\alpha_i \tag{A.4}$$

が成り立っている．$\sum_{i\in p}\alpha(h_i)=(\mathrm{res}(\alpha))(H_p)\in\mathbf{Z}_{>0}$ なので, $\mathrm{ht}(\beta)<\mathrm{ht}(\alpha)$ が成り立つ．また $\beta\in\Delta^-$ とすると (A.4) により，$\alpha\in\sum_{i\in p}\mathbf{Z}_{\geqq 0}\alpha_i$ であるが，ルート $\alpha=\sum_{i\in I}n_i\alpha_i$ の台集合 $\{i\in I|n_i\neq 0\}$ の連結性（補題 2.24）と直交条件により $\alpha=\alpha_i$ と書けることになり，これは $\mathrm{ht}(\alpha)>1$ に矛盾する．よって $\beta\in\Delta^+$ である．そこで帰納法の仮定を β に適用して $\mathrm{res}(\beta)\in\tilde{\Delta}$ がわかる．よって

$$\mathrm{res}(\alpha)=\mathrm{res}(\hat{s}_p(\beta))=\tilde{s}_p(\mathrm{res}(\beta))\in\tilde{W}(\tilde{\Delta})=\tilde{\Delta}$$

となり，主張が示された．

(iii) α と β が同じ $\langle\sigma\rangle$ 軌道に属するとすると，補題 A.6 により $\mathrm{res}(\alpha) = \mathrm{res}(\beta)$ である．逆に $\mathrm{res}(\alpha) = \mathrm{res}(\beta)$ とする．$\mathrm{res}(\alpha) = \mathrm{res}(\beta) \in \tilde{\Delta}$ なので，$\tilde{w} \in \tilde{W}, p \in J$ が存在して，$\tilde{w}(\mathrm{res}(\alpha)) = \tilde{w}(\mathrm{res}(\beta)) = \beta_p$ となる．(i) により，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\tilde{w}(\mathrm{res}(\lambda)) = \mathrm{res}(w(\lambda))$ を満たす $w \in \hat{W}$ がとれる．このとき，$\mathrm{res}(w(\alpha)) = \mathrm{res}(w(\beta)) = \beta_p$ となる．一般に，$\gamma \in \Delta$ とすると $\gamma = \pm\sum_{i\in I} n_i\alpha_i$ ($n_i \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$) と書けるが，このとき $\mathrm{res}(\gamma) = \pm\sum_{p\in J} m_p\beta_p$ ($m_p = \sum_{i\in p} n_i \in \mathbf{Z}_{\geqq 0}$) となることに注意すると, $\mathrm{res}(w(\alpha)) = \mathrm{res}(w(\beta)) = \beta_p$ から，$w(\alpha) = \alpha_i$, $w(\beta) = \alpha_j$ となる $i, j \in p$ が存在することがわかる．i と j は同じ p に属しているので，$\sigma^k(\alpha_j) = \alpha_i$ なる k が存在する．このとき $w \in \hat{W}$ により

$$\alpha = w^{-1}\alpha_i = w^{-1}\sigma^k\alpha_j = \sigma^k w^{-1}\alpha_j = \sigma^k\beta$$

となり，主張が示された．　∎

A.8［注意］　命題 A.7 の仮定の下で，さらに次も成立することが容易に示されるが，以下の議論には必要ないので証明は省略する．

(iv) $\hat{W} = \langle\hat{s}_p\rangle_{p\in J}$ で，$\hat{W} \cong \tilde{W}$ が成り立つ．

A.9［注意］　直交条件を満たさない $p \in J$ が存在するのは，$r = 2$ でカルタン行列が $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型の場合のみであり，このとき B は (B_ℓ) 型である．Δ の具体的表示を用いて直接計算してみると，$\ell > 1$ のときには $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_{\mathrm{long}} \sqcup \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ で $\mathrm{res}(\Delta) = \tilde{\Delta} \sqcup 2\tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ となり，$\ell = 1$ のときは，$\mathrm{res}(\Delta) = \tilde{\Delta} \sqcup 2\tilde{\Delta}$ となる．(この $\mathrm{res}(\Delta)$ を (BC_ℓ) 型ルート系ということもある)．また命題 A.7(iii) も成立していることが容易にわかる．さらに直交条件の成立していない $p = \{i_1, i_2\} \in J$ については，$\hat{s}_p = s_{i_1}s_{i_2}s_{i_1} (= s_{i_2}s_{i_1}s_{i_2})$ とすることにより，命題 A.7(i) および注意 A.8(iv) も成立する[1]．

A.10［命題］　$r > 1$ とする．このとき $\tilde{\Delta}$ は 2 種類の長さのルートからなるので，$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}_{\mathrm{long}} \sqcup \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ である．

---

[1] 命題 A.7 の議論を少し修正すれば，直交条件が満たされない場合も一緒に扱えるが，ただ 1 つの例外を含めるために議論が煩雑になるのは，得策とも思えないので，別扱いをすることにする．

(i) σ は直交条件を満たすとする．$\alpha \in \Delta$ を含む $\langle\sigma\rangle$ 軌道が r 個の元からなるならば，この軌道に属する r 個のルートは互いに直交し，$\mathrm{res}(\alpha) \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ である．また $\alpha \in \Delta$ に関して $\sigma(\alpha) = \alpha$ ならば，$\mathrm{res}(\alpha) \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{long}}$ である．

(ii) $r = 2$ で，Δ が $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型であるとする．$\alpha \in \Delta$ を含む $\langle\sigma\rangle$ 軌道が 2 個の元からなるとする．このとき，α と $\sigma(\alpha)$ が直交するならば $\mathrm{res}(\alpha) \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{long}}$ が成り立ち，そうでないならば $\mathrm{res}(\alpha) \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ である．また $\alpha \in \Delta$ に関して $\sigma(\alpha) = \alpha$ ならば，$\mathrm{res}(\alpha) \in 2\tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ である．

証明　(ii) は直接計算により容易に示されるので，(i) のみ示す．$\tilde{w}(\mathrm{res}(\alpha)) = \beta_p$ となる $\tilde{w} \in \tilde{W}, p \in J$ をとる．$\tilde{w}$ の表示 $\tilde{w} = \tilde{s}_{p_1} \ldots \tilde{s}_{p_n}$ を 1 つ選び，$w = \hat{s}_{p_1} \ldots \hat{s}_{p_n} \in \hat{W}$ とおくとき，$w(\alpha) = \alpha_i$ $(i \in p)$ である．$w \in \hat{W}$ なので w は $\langle\sigma\rangle$ 軌道を $\langle\sigma\rangle$ 軌道に移す．したがってはじめから $\alpha = \alpha_i$ としてよいが，このときは容易に主張を確かめられる．∎

以下，基礎体 $\mathbf{K}$ は 1 の原始 r 乗根 ζ_r を含むものとし，$m \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ に対して，

$$\mathfrak{g}(m) = \{x \in \mathfrak{g} | \sigma(x) = \zeta_r^m x\}$$

とおく．また $p \in J$ に対して $E_p, F_p \in \mathfrak{g}$ を

$$E_p = \sum_{i \in p} e_i, \qquad F_p = \begin{cases} \sum_{i \in p} f_i & (p \text{ は直交条件を満たす}) \\ 2\sum_{i \in p} f_i & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定める．このとき，B をカルタン行列とする有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}(\Phi_B)$ から $\mathfrak{g}(0)$ への同型写像が，

$$h_p \mapsto H_p, \qquad e_p \mapsto E_p, \qquad f_p \mapsto F_p$$

により定まるというのが，定理 4.5 の主張であった．

定理 4.5 の証明　$\{H_p, E_p, F_p\}_{p \in J} \subset \mathfrak{g}(0)$ は明らか．また $\mathfrak{g}$ の基本関係式から，$\mathfrak{g}(0)$ における関係式

$$[H_p, H_q] = 0, \quad [H_p, E_q] = \beta_q(H_p)E_q, \quad [H_p, F_q] = -\beta_q(H_p)F_q,$$
$$[E_p, F_q] = \delta_{pq}H_p$$

が導かれる．よってリー代数の準同型写像 $f : \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_B) \to \mathfrak{g}(0)$ ($h_p \mapsto H_p, e_p \mapsto E_p, f_p \mapsto F_p$) が自然に定まる．$\{H_p\}_{p\in J}$ は線形独立なので，f を $\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_B)$ のカルタン部分代数 $\sum_{p\in J} \mathbf{K}h_p$ に制限したものは単射である．すなわち $\mathrm{Ker}(f) \cap (\sum_{p\in J} \mathbf{K}h_p) = \{0\}$．したがって $\mathfrak{g}(\Phi_B)$ の定義により，$\tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_B)/\mathrm{Ker}(f)$ から $\mathfrak{g}(\Phi_B)$ への全射準同型写像が自然に定まる．ところが，リー代数の準同型定理により，$\mathrm{Im}(f) \cong \tilde{\mathfrak{g}}(\Phi_B)/\mathrm{Ker}(f)$ なので，結局，$\mathrm{Im}(f)$ から $\mathfrak{g}(\Phi_B)$ への全射準同型写像が自然に定まることがわかった．特に $\dim \mathrm{Im}(f) \geqq \dim \mathfrak{g}(\Phi_B)$ である．したがって，もしも $\dim \mathfrak{g}(0) \leqq \dim \mathfrak{g}(\Phi_B)$ がいえたとすると，

$$\dim \mathrm{Im}(f) \geqq \dim \mathfrak{g}(\Phi_B) \geqq \dim \mathfrak{g}(0)$$

となるが，$\mathrm{Im}(f) \subset \mathfrak{g}(0)$ なので，すべての不等号が等号となり，したがって $\mathfrak{g}(\Phi_B) \cong \mathrm{Im}(f) = \mathfrak{g}(0)$ が示され，これから主張が従う．

$\dim \mathfrak{g}(0) \leqq \dim \mathfrak{g}(\Phi_B)$ を示そう．

まず σ が直交条件を満たす場合を考える．群 $\langle\sigma\rangle$ の Δ への作用の軌道の集合を $\langle\sigma\rangle\backslash\Delta$ で表す．このとき

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{C\in\langle\sigma\rangle\backslash\Delta} \Big(\bigoplus_{\alpha\in C} \mathfrak{g}_\alpha\Big)\Big)$$

と分解され，$\mathfrak{h}$ および各 $\bigoplus_{\alpha\in C} \mathfrak{g}_\alpha$ は σ で不変である．よって

$$\mathfrak{g}(0) = \{x \in \mathfrak{g} | \sigma(x) = x\} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(0)) \oplus \Big(\bigoplus_{C\in\langle\sigma\rangle\backslash\Delta} \Big(\bigoplus_{\alpha\in C} \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}(0)\Big)\Big)$$

と分解される．ここで，$\mathfrak{h}(0) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}(0)$ は $\{H_p\}_{p\in J}$ を基底とするので，$\mathfrak{g}(\Phi_B)$ のカルタン部分代数と同じ次元をもつ．また $C \in \langle\sigma\rangle\backslash\Delta$ は σ の作用の軌道なので，命題 A.5(iii) により，$\dim(\bigoplus_{\alpha\in C} \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}(0)) \leqq 1$ が成り立つ．したがって，$\mathfrak{g}(\Phi_B)$ のルート系 $\tilde{\Delta} \subset \mathfrak{h}(0)^*$ に関して $|\langle\sigma\rangle\backslash\Delta| = |\tilde{\Delta}|$ を示せばよい．命題 A.7(ii), (iii) により，$\langle\sigma\rangle\backslash\Delta$ と $\tilde{\Delta}$ は 1 対 1 に対応するので，これは明らか．

残っている $\mathfrak{g}$ が $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型で $r = 2$ の場合を片づけよう．命題 3.15 の証明に用いた同型 $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbf{K})$ により，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbf{K})$ と同一視する．$S = ((-1)^{i+1}\delta_{i+j,2\ell+2}) \in M_{2\ell+1}(\mathbf{Z})$ とするとき，σ は，

$$\sigma(C) = -S^t C S^{-1} \qquad (C \in \mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbf{K}))$$

により与えられることが容易にわかる．S は非退化な対称行列なので，

$$\mathfrak{g}(0)=\{C\in\mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbf{K})|\sigma(C)=C\}$$

は $2\ell+1$ 次元のベクトル空間上の非退化対称双線形形式に関する直交リー代数である（$C\in\mathfrak{gl}_{2\ell+1}(\mathbf{K})$ について $-S^tCS^{-1}=C$ が成立していれば，$\mathrm{Tr}(C)=-\mathrm{Tr}((S^tC)S^{-1})=-\mathrm{Tr}(S^{-1}S^tC)=-\mathrm{Tr}({}^tC)=-\mathrm{Tr}(C)$ となるので，$\mathrm{Tr}(C)=0$，すなわち $C\in\mathfrak{sl}_{2\ell+1}(\mathbf{K})$ である）．一方，B は (B_ℓ) 型のカルタン行列なので，$\mathfrak{g}(\Phi_B)$ も $2\ell+1$ 次元のベクトル空間上の非退化対称双線形形式に関する直交リー代数と同型である．よってこれらの次元は一致し，$\dim\mathfrak{g}(0)=\dim\mathfrak{g}(\Phi_B)$ がわかった．　■

混乱を避けるために，ウェイト $U(\mathfrak{h}(0))$ 加群 V のウェイト $\mu\in\mathfrak{h}(0)^*$ のウェイト空間を $V_{[\mu]}$ で表す．例えば

$$\mathfrak{g}_{[\mu]}=\{x\in\mathfrak{g}|[h,x]=\mu(h)x\ (h\in\mathfrak{h}(0))\}$$

などと書く．$\mathfrak{g}$ の $U(\mathfrak{h})$ 加群としてのウェイト空間分解は $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus(\bigoplus_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha)$ で与えられるが，$U(\mathfrak{h}(0))$ 加群と思うと，

$$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}_{[0]},\qquad \mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}_{[\mathrm{res}(\alpha)]}\ (\alpha\in\Delta)$$

である．したがって $\mathfrak{g}$ の $U(\mathfrak{h}(0))$ 加群としてのウェイトの集合 $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g})$ について

$$\begin{aligned}&\mathrm{Wt}(\mathfrak{g})=\{0\}\sqcup\mathrm{res}(\Delta),\\&\mathfrak{g}_{[0]}=\mathfrak{h},\qquad \mathfrak{g}_{[\beta]}=\bigoplus_{\alpha\in\Delta,\mathrm{res}(\alpha)=\beta}\mathfrak{g}_\alpha\quad(\beta\in\mathrm{res}(\Delta))\end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}&\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n))\subset\{0\}\sqcup\mathrm{res}(\Delta),\\&\mathfrak{g}(n)_{[0]}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}(n),\quad \mathfrak{g}(n)_{[\beta]}=\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta,\mathrm{res}(\alpha)=\beta}\mathfrak{g}_\alpha\right)\cap\mathfrak{g}(n)\ (\beta\in\mathrm{res}(\Delta))\end{aligned}$$

である．任意の n について $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}(n)\neq\{0\}$ となることが容易にわかり，したがって $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n))\ni 0$ である．また，命題 A.7 および注意 A.9 により，$\beta\in\mathrm{res}(\Delta)$

に対する $C = \{\alpha \in \Delta | \operatorname{res}(\alpha) = \beta\}$ はただ 1 つの $\langle\sigma\rangle$ 軌道からなる．したがって C はただ 1 つの元からなるか，あるいは $r > 1$ で C は r 個の元からなる．後者の場合には，$\alpha \in C$ と $x \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ をとるとき

$$\mathfrak{g}(n)_{[\beta]} = \mathbf{K} \sum_{k=0}^{r-1} \zeta_r^{kn} \sigma^{-k}(x)$$

となり，任意の n について $\dim \mathfrak{g}(n)_{[\beta]} = 1$ が成り立つ．前者の場合 $C = \{\alpha\}$ とすると，$\mathfrak{g}(n)_{[\beta]} = \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}(n)$ であるが，$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ なので，$\dim \mathfrak{g}(n)_{[\beta]} \leqq 1, \sum_{n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}} \dim \mathfrak{g}(n)_{[\beta]} = 1$ が成り立つ．もしも $\beta \in \tilde{\Delta}$ ならば，定理 4.5 により $\dim \mathfrak{g}(0)_{[\beta]} = 1$ なので，$n \neq 0$ について $\dim \mathfrak{g}(n)_{[\beta]} = 0$ である．また $\beta \notin \tilde{\Delta}$ ならば（この場合 $r = 2$ で A は $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型である），$\dim \mathfrak{g}(0)_{[\beta]} = 0$ なので，$\dim \mathfrak{g}(1)_{[\beta]} = 1$ である．

以上の議論と命題 A.10 により次が示された．

A.11 ［命題］

(i) $\operatorname{Wt}(\mathfrak{g}(0)) = \{0\} \sqcup \tilde{\Delta}$.

(ii) $r > 1$ で $n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}, n \neq 0$ とする．σ が直交条件を満たせば $\operatorname{Wt}(\mathfrak{g}(n)) = \{0\} \sqcup \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ である．また, $r = 2$ で A が $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型のときには, $\operatorname{Wt}(\mathfrak{g}(1)) = \{0\} \sqcup \operatorname{res}(\Delta)$ である．

(iii) 任意の $\beta \in \operatorname{Wt}(\mathfrak{g}(n)) \setminus \{0\}$ に対して $\dim \mathfrak{g}(n)_{[\beta]} = 1$ が成り立つ．

なお，ここまでの議論を用いると，次の事実の証明も得られる．

A.12 ［系］　$\mathfrak{a}$ を (X_ℓ) 型単純リー代数とする．ただし $\mathfrak{a}$ は 2 種類の長さのルートをもつものとする（すなわち，X は B, C, F, G のいずれかであるとする）．このとき最高ルートは長ルートである．

証明　$\mathfrak{a}$ は，直交条件を満たす σ であって $r > 1$ となるものに関する $\mathfrak{g}(0)$ と同型であるので，この場合に考えればよい．$\theta \in \Delta$ を $\mathfrak{g}$ の最高ルートとする．$\operatorname{res}(\alpha_i) = \beta_p$ $(i \in p)$ なので，$\tilde{\Delta} = \operatorname{res}(\Delta)$ により，$\operatorname{res}(\theta)$ は $\mathfrak{g}(0)$ の最高ルートである．また σ は $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ を保つので，$\sigma(\theta)$ も最高ルートである．したがって $\sigma(\theta) = \theta$ が成り立つ．よって命題 A.10 により $\operatorname{res}(\theta) \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{long}}$ がわかる．　∎

定理 4.6 の証明　(i) $\mathfrak{g}(0)$ は単純リー代数なので，$\mathfrak{g}(0)$ は非自明な既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群である．したがって，以下 $r>1$ で $n \in \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}, n \neq 0$ の場合を考える．

$\mathfrak{g}(n)$ は有限次元 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群なので，定理 3.41，定理 3.47 により，優整ウェイト μ を最高ウェイトとする（$\mathfrak{g}(0)$ の）最高ウェイト加群 $L(\mu)$ の直和である．

いま自明な $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 $L(0)$ が $\mathfrak{g}(n)$ の直和成分になっているとする．その最高ウェイト・ベクトルを x とすると，$\mathfrak{g}_{[0]}=\mathfrak{h}$ なので，$x \in \mathfrak{h}$ である．このとき

$$0=[E_p,x]=-[x,\sum_{i\in p} e_i]=-\sum_{i\in p}\alpha_i(x)e_i$$

なので，任意の $i \in I$ に対して $\alpha_i(x)=0$ である．ところが $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ は $\mathfrak{h}^*$ の基底だったので，$x=0$ となってしまい矛盾である．したがって $\mathfrak{g}(n)$ は $L(0)$ と同型な部分加群を含まないことがわかった．よって命題 A.11(iii) により，$\mathfrak{g}(n)$ に含まれる既約な部分 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群 V を 1 つとるとき，$\mathrm{Wt}(V) \supset \mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n)) \setminus \{0\}$ となることを示せばよい．

まず σ が直交条件を満たしている場合を考える．V の最高ウェイトを μ とすると，$\mu \neq 0$ なので，命題 A.11 により $\mu \in \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ である．$\mathfrak{g}(0)$ のワイル群を $\tilde{W}$ とするとき，$L(\mu)$ のウェイトの集合は $\tilde{W}$ 不変であるが，$\tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ は 1 つの $\tilde{W}$ 軌道からなるので，$\mathrm{Wt}(V) \supset \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}=\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n)) \setminus \{0\}$ が成り立つ．

$r=2$ で A は $(\mathrm{A}_{2\ell})$ 型とする．$\mathfrak{g}$ の最大ルートを θ とするとき，$\beta=\mathrm{res}(\theta) \in 2\tilde{\Delta}_{\mathrm{short}}$ は $\mathfrak{h}(0)^*$ 上の標準半順序に関する $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(1))$ の最大元である．したがって $V=U(\mathfrak{g}(0))\mathfrak{g}(1)_{[\beta]}$ としてよい．このとき直接計算により容易に $\mathrm{Wt}(V) \cap \tilde{\Delta}_{\mathrm{long}} \neq \emptyset, \mathrm{Wt}(V) \cap \tilde{\Delta}_{\mathrm{short}} \neq \emptyset$ がわかるので，$\mathrm{Wt}(V)$ の $\tilde{W}$ 不変性により，やはり $\mathrm{Wt}(V) \supset \mathrm{res}(\Delta)=\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(1)) \setminus \{0\}$ が成り立つ．

(ii) $\mathfrak{g}(n)$ は既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群なので，$\mathfrak{g}(n)^*$ も既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群である．双対加群の定義から $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n)^*)=-\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n))$ であるが，命題 A.11 により，これは $\mathrm{Wt}(\mathfrak{g}(n))$ と一致する．ウェイトの集合が一致するので最高ウェイトが一致し，したがって $\mathfrak{g}(n)$ と $\mathfrak{g}(n)^*$ は同型な既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群である．

(iii) 2 つの有限次元既約 $U(\mathfrak{g}(0))$ 加群が同型となるための必要十分条件は，そのウェイトの集合が一致することである．よって主張は，命題 A.11 から従う．

■

付録 **B**

関連する話題

本文で述べた，カッツ・ムーディ・リー代数や量子群の理論，特にその表現論は他分野における多くの応用をもつ．また，本文には述べることのできなかった，表現論における重要な話題も多い．本章では，これらの一部に関して概説を試みる．アイデアを説明することを主眼としており，必ずしも論理的に完全な説明を与えるわけではないので，きちんと勉強するには，文中であげる文献を参照されたい．むしろ，この先にどういうおもしろい話が待っているかを垣間見て，さらに進んで勉強するための手引きとして読んでもらえば十分である．

1．マクドナルド恒等式，保型関数

アフィン・リー代数は有限次元単純リー代数を用いて具体的に書けてしまうので（第4章2節），正ルートの集合 Δ^+ と $\alpha \in \Delta^+$ に対するルート空間の次元 $\dim \mathfrak{g}_\alpha$ の簡明な表示が存在し，これを分母公式 (4.35) に適用することにより，興味深い等式が得られる．このことを，一番簡単な $(\mathrm{A}_1^{(1)})$ 型アフィン・リー代数で実行してみよう．

(A_1) 型の有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のカルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ は1次元で h により張られる．また，ただ1つの正ルート α に関して，

$$\mathfrak{h}^* = \mathbf{K}\alpha, \qquad \alpha(h) = 2$$

が成立している．このとき，$(\mathrm{A}_1^{(1)})$ 型のアフィン・リー代数 $\hat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のカルタン部分代数 $\hat{\mathfrak{h}}$ は $\mathfrak{h} \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$ と同一視される．また，$\delta \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を $\delta(h) = \delta(c) = 0, \delta(d) = 1$ により定め，

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_0 = \delta - \alpha, \quad h_1 = h, \quad h_0 = -h + c$$

とおくとき，$(\hat{\mathfrak{h}}, \{h_0, h_1\}, \{\alpha_0, \alpha_1\})$ が基本ルートデータになる．第 4 章 2 節により，正ルートの集合 Δ^+ は

$$\Delta^+ = \{\alpha\} \cup \{\pm\alpha + n\delta | n \in \mathbf{Z}_{>0}\} \cup \{n\delta | n \in \mathbf{Z}_{>0}\}$$

により与えられ，いまの場合には任意の $\beta \in \Delta^+$ に対して $\dim \hat{\mathfrak{g}}_\beta = 1$ が成り立っている．$i = 0, 1$ に対して $s_i \in GL(\hat{\mathfrak{h}}^*)$ を $s_i\lambda = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i$ により定めるとき，ワイル群 W は s_0, s_1 により生成される群であるが，$t = s_0 s_1 \in W$ とおくとき，$W = \{t^n, s_1 t^n | n \in \mathbf{Z}\}$ となることが容易にわかる．

$\rho \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を $\rho(h_0) = \rho(h_1) = 1$ を満たすものとするとき，$n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$t^n\rho - \rho = 2n\alpha - (2n^2 + n)\delta, \quad s_1 t^n \rho - \rho = -(2n+1)\alpha - (2n^2+n)\delta$$

が n に関する帰納法でわかる．

よって分母公式 (4.35) は，いまの場合，等式

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{e}^{2n\alpha - (2n^2+n)\delta} - \sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{e}^{-(2n+1)\alpha - (2n^2+n)\delta} \\ =&(1 - \mathbf{e}^{-\alpha}) \prod_{n=1}^{\infty} \big((1 - \mathbf{e}^{-\alpha - n\delta})(1 - \mathbf{e}^{\alpha - n\delta})(1 - \mathbf{e}^{-n\delta})\big)\end{aligned}$$

を意味する．この両辺を $1 - \mathbf{e}^{-\alpha}$ で割り，$X = \mathbf{e}^{-\delta}$ と置き直すと，等式

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{\mathbf{e}^{2n\alpha} - \mathbf{e}^{-(2n+1)\alpha}}{1 - \mathbf{e}^{-\alpha}} X^{2n^2+n} \\ =& \prod_{n=1}^{\infty} \big((1 - \mathbf{e}^{-\alpha}X^n)(1 - \mathbf{e}^{\alpha}X^n)(1 - X^n)\big)\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$\frac{\mathbf{e}^{2n\alpha} - \mathbf{e}^{-(2n+1)\alpha}}{1 - \mathbf{e}^{-\alpha}} = \sum_{p=0}^{4n} \mathbf{e}^{(2n-p)\alpha}$$

なので，特殊化 $\mathbf{e}^\alpha \mapsto 1$ を施すと，

$$\varphi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$$

と置くときの，$\varphi(x)^3$ の展開式

$$\varphi(x)^3 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} (4n+1) x^{2n^2+n}$$

が求まる．この式自体はヤコビの 3 重積公式として古くから知られているものであるが，一般のアフィン・リー代数に対して同様の議論を行うことにより，$\varphi(x)^{\dim \mathfrak{g}}$（$\mathfrak{g}$ は有限次元単純リー代数）の展開式を求めることができる．これが有名なマクドナルド恒等式（Macdonald[35]）である．

マクドナルド恒等式が得られたのは，分母公式がカッツ・ムーディ・リー代数の表現論を用いて証明される以前のことであり，マクドナルドは，アフィン・リー代数に対する分母公式を，リー代数を用いずにアフィン・ルート系（結果的にアフィン・リー代数の実ルートの集合と同じものになる）の言葉のみを用いて定式化し，これを直接証明している．分母公式には虚ルートやそのルート空間の次元など，アフィン・ルート系のみを見ていたのでは意味のわからない要素も含まれるが，カッツ・ムーディ・リー代数に対する一般の分母公式が証明されてはじめて，その意味が明瞭になったのであった．

なお，分母公式は自明な 1 次元表現の指標公式であるが，それ以外の可積分最高ウェイト表現でも，表現が具体的に実現されており指標がはじめからわかっているものがあれば，指標公式を用いて恒等式が得られる．この考えを適用することにより，いろいろな保型関数に関する恒等式が導かれるのだが，その詳細は例えば Kac[22] などを参照されたい．

また，カッツ・ムーディ・リー代数よりもう少し広いリー代数のクラスとして，R. ボーチャーズによる一般カッツ・ムーディ・リー代数というものがあるが，ボーチャーズはモンスター群と関連するある一般カッツ・ムーディ・リー代数に対して，マクドナルド恒等式を導いた論法を適用することにより，ムーン・シャイン予想を最終的に解決した．このあたりのことに興味のある読者は，例えば原田 [10] をご覧になるとよいであろう．

2. ホップ代数

リー代数の包絡代数や量子群は，単に結合代数であるだけでなく，ホップ代数というものになっている．重要な概念なので，これについて簡単に説明する．

A が体 $\mathbf{K}$ 上の結合代数であるということは，A は $\mathbf{K}$ 上のベクトル空間であって，双線形な積 $A \times A \to A$ が与えられており，これに関して結合法則が成り立ち，また単位元が存在するということである．このことをベクトル空間と線形写像の言葉を用いて言い直すと，次のようになる．

A の双線形な積と A の単位元 1 から，2 つの線形写像

$$m : A \otimes A \to A \quad (a \otimes b \mapsto ab), \qquad \eta : \mathbf{K} \to A \quad (c \mapsto c1)$$

が定まる．A が結合代数であるということは，これらに関して以下の可換図式が成り立つということである：

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes 1} & A \otimes A \\ {\scriptstyle 1 \otimes m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} K \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & A \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & A \otimes K \\ & \searrow\!\!\searrow & \downarrow{\scriptstyle m} & \swarrow\!\!\swarrow & \\ & & A & & \end{array}$$

上の可換図式において写像の向きをすべて逆にすることにより，結合代数の双対概念である余結合代数が定義される．すなわち，ベクトル空間 B と 2 つの線形写像

$$\Delta : B \to B \otimes B, \qquad \epsilon : B \to \mathbf{K}$$

が与えられていて，これらに関して以下の可換図式が成り立つとき，B を $\mathbf{K}$ 上の余結合代数と呼ぶ：

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\Delta} & B \otimes B \\ {\scriptstyle \Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1 \otimes \Delta} \\ B \otimes B & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & B \otimes B \otimes B \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \swarrow\!\!\swarrow & \downarrow{\scriptstyle \Delta} & \searrow\!\!\searrow & \\ K \otimes B & \xleftarrow{\epsilon \otimes 1} & B \otimes B & \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} & B \otimes K \end{array}$$

また，ベクトル空間 H と 4 つの線形写像

$$m : H \otimes H \to H, \qquad \eta : \mathbf{K} \to H, \qquad \Delta : H \to H \otimes H, \qquad \epsilon : H \to \mathbf{K}$$

が与えられていて，H は，m, η に関しては結合代数，また Δ, ϵ に関しては余結合代数になっているものとする．ここでさらに，Δ, ϵ が結合代数の準同型写像であるとき，H は双代数であるという（余結合代数の準同型写像の概念をしかるべく定義すれば，これは m, η が余結合代数の準同型写像になっているというのと同じことである）．なお，$H \otimes H$ は，双線形な積

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$$

により，結合代数と見なす．

B.1 [定義]　H を双代数とする．線形写像 $S : H \to H$ であって，以下の可換図式を満たすものが存在するとき，H をホップ代数と呼ぶ．

$$\begin{array}{ccccc} A\otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A & \xrightarrow{\Delta} & A\otimes A \\ {\scriptstyle S\otimes 1}\downarrow & & {\scriptstyle \eta\circ\epsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes S} \\ A\otimes A & \xrightarrow{m} & A & \xleftarrow{m} & A\otimes A \end{array}$$

実は，上のような S は存在すれば一意的である．また S は結合代数の反準同型写像である．すなわち，任意の $a, b \in H$ に対して，$S(ab) = S(b)S(a)$ が成り立つ．

B.2 [命題]　$\mathfrak{a}$ をリー代数とする．結合代数の準同型写像 $\Delta : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})\otimes U(\mathfrak{a})$, $\epsilon : U(\mathfrak{a}) \to \mathbf{K}$ および，結合代数の反準同型写像 $S : U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})$ が，

$$\Delta(a) = a\otimes 1 + 1\otimes a, \quad \epsilon(a) = 0, \quad S(a) = -a \qquad (a \in \mathfrak{a})$$

により定まる．また，これに関して $U(\mathfrak{a})$ はホップ代数になる．

これと同様なことが，以下のとおり量子群でも成立する．ただし，チェックするのはもっと面倒である．

B.3 [命題]　第 5 章の記号を用いる．量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に関して，結合代数の準同型写像 $\Delta : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})\otimes U_q(\mathfrak{g})$, $\epsilon : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathbf{K}(q)$ および，結合代数の反準同型写像 $S : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ が，

$$\left(\begin{aligned} &\Delta(K^h) = K^h\otimes K^h, \\ &\Delta(E_i) = E_i\otimes K_i^{-1} + 1\otimes E_i, \\ &\Delta(F_i) = F_i\otimes 1 + K_i\otimes F_i, \end{aligned}\right. \quad \left(\begin{aligned} &\epsilon(K^h) = 1, \\ &\epsilon(E_i) = 0, \\ &\epsilon(F_i) = 0, \end{aligned}\right. \quad \left(\begin{aligned} &S(K^h) = K^{-h}, \\ &S(E_i) = -E_iK_i, \\ &S(F_i) = -K_i^{-1}F_i, \end{aligned}\right.$$

により定まる（$h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Z}}$, $i \in I$）．また，これに関して $U_q(\mathfrak{g})$ はホップ代数になる．

一般に H を結合代数，V_1, V_2 を H 加群とするとき，$V_1 \otimes V_2$ は，次により $H\otimes H$ 加群になる：

$$(h_1\otimes h_2)(v_1\otimes v_2) = h_1v_1\otimes h_2v_2 \qquad (h_1, h_2 \in H,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2).$$

H がホップ代数になっているときには，$\Delta: H \to H \otimes H$ を用いて，$H \otimes H$ 加群は H 加群と思える．したがって，ホップ代数の場合には，2 つの H 加群のテンソル積は自然に H 加群と見なせる．

また，ホップ代数の場合には $\epsilon: H \to \mathbf{K}$ により 1 次元加群が自然に定まっている．これをホップ代数の自明加群という．

3. ハイゼンベルグ代数とアフィン・リー代数

アフィン・リー代数はハイゼンベルグ代数を部分リー代数として含むが，アフィン・リー代数の既約表現のうちで，ハイゼンベルグ代数に制限したものがフォック表現（例 1.36）になるものがある．この場合，アフィン・リー代数の表現がフォック表現の表現空間（無限変数の多項式環）の上に実現されることになり，表現の具体的表示が得られる．この間の事情を，一番簡単な $(\mathrm{A}_1^{(1)})$ 型のアフィン・リー代数の場合に説明しよう．

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ 上の標準不変形式

$$\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{K} \qquad (\kappa(x, y) = \mathrm{Tr}(xy))$$

を用いて，$(\mathrm{A}_1^{(1)})$ 型のアフィン・リー代数

$$\hat{\mathfrak{g}} = (\mathbf{K}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$$

が定まる．$\mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ の基底 $\{h, e, f\}$ を (1.18) のようにとる．また $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbf{K})$ と $n \in \mathbf{Z}$ に対して $x(n) = t^n \otimes x \in \hat{\mathfrak{g}}$ とおく．このとき，$\hat{\mathfrak{g}}$ のカッツ・ムーディ・リー代数としての生成系は

$$h_1 = h(0), \qquad e_1 = e(0), \qquad f_1 = f(0),$$
$$h_0 = -h(0) + c, \qquad e_0 = f(1), \qquad f_0 = e(-1)$$

により与えられる（カルタン部分代数は $\hat{\mathfrak{h}} = \mathbf{K}h \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$）．

奇数 $n = 2k+1$ に対して $a_n = e(k) + f(k+1) \in \hat{\mathfrak{g}}$ とおくとき，

$$[a_n, a_m] = \delta_{n,-m} nc \qquad (n,m \text{ は奇数})$$

が成り立つので，

$$\mathfrak{a} = \Big(\sum_{n:\text{奇数}} \mathbf{K}a_n\Big) \oplus \mathbf{K}c$$

は，ハイゼンベルグ代数と同型な $\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数である．正の奇数の集合を $\mathbf{M}$ で表す．既約 $U(\mathfrak{a})$ 加群（フォック表現）F が，

$$F = \mathbf{K}[x_n | n \in \mathbf{M}] = \mathbf{K}[x_1, x_3, x_5, \ldots],$$
$$cf = f, \quad a_n f = \partial_n(f), \quad a_{-n} f = n x_n f \qquad (f \in F,\ n \in \mathbf{M})$$

により定まる（ただし $\partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$）．

$\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ を

$$\lambda(h(0)) = 0, \qquad \lambda(c) = 1, \qquad \lambda(d) = 0$$

により定める．$\lambda(h_1) = 0$, $\lambda(h_0) = 1$ なので λ は優整ウェイトで，したがって $L(\lambda)$ は可積分な最高ウェイト加群になる．

B.4 [補題]　$U(\mathfrak{a})$ 加群の同型写像 $\Phi : F \to L(\lambda)$ であって，$\Phi(1) = \ell_\lambda$ を満たすものがただ 1 つ存在する．

証明　n が正の奇数ならば $a_n \ell_\lambda = 0$，また $c\ell_\lambda = \ell_\lambda$ なので，ポアンカレ・バーコフ・ヴィットの定理により，

$$U(\mathfrak{a})\ell_\lambda = \mathbf{K}[a_{-n} | n \in \mathbf{M}]\ell_\lambda$$

となり，したがって $U(\mathfrak{a})$ 加群の全射準同型写像 $F \to U(\mathfrak{a})\ell_\lambda$ $(1 \mapsto \ell_\lambda)$ が定まる．ところが F は既約 $U(\mathfrak{a})$ 加群だったので，これは同型写像になる．以下，これにより F を $L(\lambda)$ の部分 $U(\mathfrak{a})$ 加群と同一視する．このとき，$F = L(\lambda)$ を示せばよい．

$L(\lambda)$ の直和分解

$$L(\lambda) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} L(\lambda)^{(m)}, \qquad L(\lambda)^{(m)} = \bigoplus_{\gamma \in Q^+, \mathrm{ht}(\gamma) = m} L(\lambda)_{\lambda - \gamma}$$

を考える．$n_1, \ldots, n_r$ を正の奇数，$k_1, \ldots, k_r$ を非負整数とするとき，

$$x_{n_1}^{k_1} x_{n_2}^{k_2} \cdots x_{n_r}^{k_r} \in L(\lambda)^{(k_1 n_1 + \cdots + k_r n_r)}$$

が成り立つので，

$$F = \bigoplus_{m=0}^{\infty} F^{(m)}, \qquad F^{(m)} = F \cap L(\lambda)^{(m)} = \bigoplus_{\sum k_j n_j = m} \mathbf{K} x_{n_1}^{k_1} x_{n_2}^{k_2} \cdots x_{n_r}^{k_r}$$

である．したがって，任意の m に対して $\dim L(\lambda)^{(m)} = \dim F^{(m)}$ を示せばよい．上に与えた $F^{(m)}$ の記述により，

$$\sum_{m=0}^{\infty} \dim F^{(m)} q^m = \frac{1}{\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r-1})}$$

が容易にわかる．一方，$\sum_{m=0}^{\infty} \dim L(\lambda)^{(m)} q^m$ も，指標公式を用いて具体的に計算することができて，$1/\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r-1})$ と一致することが示される．ただし，途中の計算において，よく知られた等式（オイラーの公式）

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r) = \sum_{m\in\mathbf{Z}} (q^{6m^2-m} - q^{6m^2+5m+1})$$

を用いる必要がある．詳細は読者に委ねる．■

以下，補題B.4により，$L(\lambda)$ を $F = \mathbf{K}[x_1, x_3, x_5, \ldots]$ と同一視する．$n \in \mathbf{Z}$ に対して $b_n \in \hat{\mathfrak{g}}$ を

$$b_{2k+1} = e(k) - f(k), \qquad b_{2k} = -h(k)$$

により定める．$\hat{\mathfrak{g}}$ は

$$\{a_n | n \in 2\mathbf{Z}+1\} \cup \{b_m | m \in \mathbf{Z}\} \cup \{c, d\}$$

を基底にもつので，これらの F への作用が求まれば，$U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群としての F が完全に定まる．$\{a_n | n \in 2\mathbf{Z}+1\} \cup \{c\}$ の作用は既にわかっているので，$\{b_m | m \in \mathbf{Z}\} \cup \{d\}$ の作用を書き下せばよい．その答えは次で与えられる．

B.5 ［命題］　F 上の作用素として，

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}} z^{-j} b_j = \frac{1}{2}\left(\exp\left(2\sum_{n\in\mathbf{M}} z^n x_n\right)\exp\left(-2\sum_{m\in\mathbf{M}} \frac{z^{-m}}{m}\partial_m\right) - 1\right),$$

$$2d + \frac{1}{2}h(0) = -\sum_{m\in\mathbf{M}} m x_m \partial_m.$$

ただし z は，0でない複素パラメータとする．

証明　$\alpha_0(2d+\frac{1}{2}h(0)) = \alpha_1(2d+\frac{1}{2}h(0)) = 1$ を用いると，$2d+\frac{1}{2}h(0)$ は $L(\lambda)^{(m)}$ に $-m\,\mathrm{id}$ により作用することがわかる（ここで，補題 B.4 の証明中の記号を用いた）．補題 B.4 の証明により，

$$L(\lambda)^{(m)} = \bigoplus_{\sum k_j n_j = m} \mathbf{K} x_{n_1}^{k_1} x_{n_2}^{k_2} \cdots x_{n_r}^{k_r}$$

なので，$2d+\frac{1}{2}h(0) = -\sum_{m\in\mathbf{M}} m x_m \partial_m$ が成立する．

もう 1 つの式を証明しよう．$X(z) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} z^{-j} b_j + \frac{1}{2}$ とおく．関係式

$$[a_m, b_n] = 2b_{m+n} + \delta_{m,-n} c \qquad (m \text{ は奇数，} n \text{ は整数})$$

を用いて，F 上の作用素としての関係式

$$[\partial_m, X(z)] = 2z^m X(z), \qquad [x_m, X(z)] = \frac{2z^{-m}}{m} X(z) \qquad (m \in \mathbf{M})$$

が導かれる．一方

$$A(z) = \exp\left(2 \sum_{m\in\mathbf{M}} \frac{z^{-m}}{m} \partial_m\right)$$

に関して

$$[x_m, A(z)] = -\frac{2z^{-m}}{m} A(z) \qquad (m \in \mathbf{M})$$

が容易にわかり，よって

$$[x_m, X(z)A(z)] = [x_m, X(z)]A(z) + X(z)[x_m, A(z)] = 0$$

が成り立つ．これは，$(X(z)A(z))(x_m\varphi) = x_m(X(z)A(z))(\varphi)$ が，任意の $m \in \mathbf{M}$ と $\varphi \in F$ に対して成り立つことを意味する．よって，任意の $\tau, \varphi \in F$ に対して，$(X(z)A(z))(\tau\varphi) = \tau(X(z)A(z))(\varphi)$ が成り立つ．特に，$(X(z)A(z))(1) = \psi$ とおくとき，任意の $\varphi \in F$ に対して $(X(z)A(z))(\varphi) = \psi\varphi$ が成り立つ．

一方 $[\partial_m, A(z)] = 0$ から，$[\partial_m, X(z)A(z)] = 2z^m X(z)A(z)$ となり，したがって，

$$\partial_m(\psi) = \partial_m X(z)A(z)(1) = X(z)A(z)\partial_m(1) + 2z^m X(z)A(z)(1) = 2z^m \psi$$

が，任意の $m \in \mathbf{M}$ について成り立つ．これから

$$\psi = \psi(0) \exp\left(2 \sum_{m\in\mathbf{M}} z^m x_m\right)$$

がわかる．ここで

$$\psi(0) = (X(z)(1))(0) = \frac{1}{2} + \sum_j z^{-j}(b_j 1)(0) = \frac{1}{2} + (b_0 1)(0) = \frac{1}{2}$$

なので，結局

$$X(z)A(z) = \frac{1}{2}\exp\left(2\sum_{m\in\mathbf{M}} z^m x_m\right)$$

である．この両辺に，右から $A(z)^{-1} = \exp\left(-2\sum_{m\in\mathbf{M}} \frac{z^{-m}}{m}\partial_m\right)$ を掛けて求める式を得る． ∎

次節で以下の事実を用いる．

B.6［補題］　$U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群 $L(\lambda) = \mathbf{K}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ 上の反変形式 χ は，

$$\begin{aligned}&\chi(P(x_1,x_3,x_5,\dots), Q(x_1,x_3,x_5,\dots))\\ =&P(\partial_1, \frac{\partial_3}{3}, \frac{\partial_5}{5}, \dots)(Q(x_1,x_3,x_5,\dots))|_{x=0}\end{aligned}$$

により与えられる．

証明　${}^t a_n = a_{-n}$ が容易にわかり，したがって

$$\begin{aligned}&\chi(P(x_1,x_3,x_5,\dots), Q(x_1,x_3,x_5,\dots))\\ =&\chi(P(a_{-1}, a_{-3}/3, a_{-5}/5, \dots)(1), Q(x_1,x_3,x_5,\dots))\\ =&\chi(1, P(a_1, a_3/3, a_5/5, \dots)(Q(x_1,x_3,x_5,\dots)))\\ =&\chi(1, P(\partial_1, \partial_3/3, \partial_5/5, \dots)(Q(x_1,x_3,x_5,\dots)))\\ =&P(\partial_1, \partial_3/3, \partial_5/5, \dots)(Q(x_1,x_3,x_5,\dots))|_{x=0}.\end{aligned}$$ ∎

なお，$\mathfrak{b} = (\sum_{n\in\mathbf{Z}} \mathbf{K}h(n)) \oplus \mathbf{K}c$ もハイゼンベルグ代数と同型な $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ の部分リー代数になっている．この場合，$L(\lambda)$ を $U(\mathfrak{b})$ 加群と見たものは既約ではないが，フォック表現の可算個の直和になっていることがわかり，上と同様の考察が可能である．

以上，$\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ を例として結果を述べたが，一般のアフィン・リー代数でも対応する事実が成り立つ（Kac-Kazhdan-Lepowsky-Wilson[19]，Frenkel-Kac[8]）．

4. ソリトン方程式

以下，前節の記号をそのまま用いる．$U(\hat{\mathfrak{g}})$ はホップ代数なので，$L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ は $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群である（第 2 節）．$\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda\in L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ に関して，

$$e_1(\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda)=e_0(\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda)=0,\qquad t(\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda)=2\lambda(t)\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda\quad(t\in\hat{\mathfrak{h}})$$

が成り立っているので，$U(\hat{\mathfrak{g}})(\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda)$ は最高ウェイト 2λ の最高ウェイト加群である．また，f_0,f_1 の $L(\lambda)$ への作用が局所ベキ零であることから，これらの $L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ への作用も局所ベキ零で，したがって，$U(\hat{\mathfrak{g}})(\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda)$ は可積分な最高ウェイト加群になる．したがって $U(\hat{\mathfrak{g}})(\ell_\lambda\otimes\ell_\lambda)$ は $L(2\lambda)$ と同型である．以下，これにより，$L(2\lambda)$ を $L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ の部分 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群と同一視する．

χ を $L(\lambda)$ 上の 0 でない反変形式とすると，$L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ 上の反変形式 $\tilde{\chi}$ が，

$$\tilde{\chi}(m_1\otimes m_2,n_1\otimes n_2)=\chi(m_1,n_1)\chi(m_2,n_2)\qquad(m_1,m_2,n_1,n_2\in L(\lambda))$$

により定まる．χ の非退化性により，$\tilde{\chi}$ は非退化である．また，$\tilde{\chi}$ の $L(2\lambda)$ への制限は $L(2\lambda)$ 上の 0 でない反変形式なので，非退化である．よって

$$V=\{v\in L(\lambda)\otimes L(\lambda)|\tilde{\chi}(v,L(2\lambda))=\{0\}\}$$

とおくとき，V は $L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ の部分 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群で，$L(\lambda)\otimes L(\lambda)=L(2\lambda)\oplus V$ が成り立つ．

さて，$L(\lambda)$ は無限変数の多項式環 $\mathbf{K}[x_1,x_3,x_5,\dots]$ と同一視されていたので，$L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ は

$$\mathbf{K}[x_1,x_3,x_5,\dots]\otimes\mathbf{K}[y_1,y_3,y_5,\dots]=\mathbf{K}[x_1,x_3,x_5,\dots;y_1,y_3,y_5,\dots]$$

と同一視される．さらに，変数変換

$$z_i=\frac{x_i+y_i}{2},\qquad w_i=\frac{x_i-y_i}{2}$$

により，これを $\mathbf{K}[z_1,z_3,z_5,\dots;w_1,w_3,w_5,\dots]$ と同一視する．このとき，$\hat{\mathfrak{g}}$ の部分リー代数 $\mathfrak{a}$（前節）の $\mathbf{K}[z;w]$ への作用は，

$$c\mapsto 2,\quad a_m\mapsto\partial_{z_m},\quad a_{-m}\mapsto 2mz_m\qquad(m\in\mathbf{M})$$

により与えられる（ここで，$\partial_{z_m}=\frac{\partial}{\partial z_m}$）．また，補題 B.6 により，反変形式 $\tilde{\chi}$ は，

$$\begin{aligned}&\tilde{\chi}(R(z;w),S(z,w))\\=&R(\dots,\partial_{z_m}/2m,\dots;\dots,\partial_{w_m}/2m,\dots)(S(z;w))|_{z=w=0}\end{aligned}$$

により与えられる．

そこで

$$\mathcal{H}=V\cap\mathbf{K}[w_1,w_3,w_5,\dots],\qquad \mathcal{S}=\{\tau\in L(\lambda)|\tau\otimes\tau\in L(2\lambda)\}$$

とおく．$\mathcal{H}$ は V の部分空間であるが，$\mathcal{S}$ は $L(\lambda)$ の単なる部分集合である．

$P=P(w)\in\mathcal{H},\tau=\tau(x)\in\mathcal{S}$ とする．V は $L(\lambda)\otimes L(\lambda)$ の部分 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群なので，任意の $Q=Q(z)\in\mathbf{K}[z]$ に関して，$Q(z)P(w)\in V$ である．また $\tau\otimes\tau=\tau(z+w)\tau(z-w)\in L(2\lambda)$ なので，V の定義により，

$$Q(\dots,\partial_{z_m}/2m,\dots)P(\dots,\partial_{w_m}/2m,\dots)(\tau(z+w)\tau(z-w))|_{z=w=0}=0$$

となるが，Q は任意だったので，任意の $\tau\in\mathcal{S}$ に対して

$$P(\dots,\partial_{w_m}/2m,\dots)(\tau(z+w)\tau(z-w))|_{w=0}=0\quad(P\in\mathcal{H})\tag{B.1}$$

が成立する．

(B.1) を，未知関数 $\tau=\tau(z)$ に関する非線形偏微分方程式系と見たものを，KdV 階層と呼ぶ．実際，$\mathcal{H}$ の自明でない元のうちで最も簡単な形をしたものとして，$P=w_1^4-3w_1w_3$ をとることができるが，これに対応する方程式は，$u=2\partial_{z_1}^2\log\tau$, $x=z_1$, $t=z_3$ とおくことにより，通常の KdV 方程式

$$u_t=\frac{1}{4}(u_{xxx}+6uu_x)$$

に書き直される．その意味で，(B.1) は KdV 方程式の無限変数への拡張になっているのである．実は，シューア多項式を用いて $\mathcal{H}$ の元を具体的に書く方法もあり，本来はここが一番おもしろい部分であるともいえるのだが，その詳細は省略する．

以下，もう 1 つのポイントである，KdV 階層の解（$\mathcal{S}$ の元）の具体的構成について述べる．$X=\{ae_i,af_i|i=0,1,\,a\in\mathbf{K}\}$ とおく．$x\in X$ は $L(\lambda)$ 上の

作用素として局所ベキ零なので，この空間上の線形変換として $\exp(x)$ を考えることができる．そこで $G = \langle \exp(x) | x \in X \rangle$ とおく．

B.7 ［命題］　$g \in G$ に対して $g\,\ell_\lambda \in \mathcal{S}$.

証明　$x \in X$ は $L(\lambda) \otimes L(\lambda)$ にも局所ベキ零に作用しているので，$L(\lambda) \otimes L(\lambda)$ 上の作用素としての, $\exp(x)$ も考えることができる．$L(2\lambda)$ は $L(\lambda) \otimes L(\lambda)$ の部分 $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群なので，$\exp(x)(L(2\lambda)) = L(2\lambda)$ が成り立つ．また，$L(\lambda) \otimes L(\lambda)$ への $\hat{\mathfrak{g}}$ の作用の定義から，

$$\exp(x)(v_1 \otimes v_2) = \exp(x)(v_1) \otimes \exp(x)(v_2) \qquad (x \in X)$$

である．

$g = \exp(x_1) \cdots \exp(x_r) \in G$ とする（ここで $x_1, \ldots, x_r \in X$）．$\ell_\lambda \otimes \ell_\lambda \in L(2\lambda)$ により $\exp(x_1) \cdots \exp(x_r)(\ell_\lambda \otimes \ell_\lambda) \in L(2\lambda)$ であるが，

$$\begin{aligned} &\exp(x_1) \cdots \exp(x_r)(\ell_\lambda \otimes \ell_\lambda) \\ =&\exp(x_1) \cdots \exp(x_r)(\ell_\lambda) \otimes \exp(x_1) \cdots \exp(x_r)(\ell_\lambda) \\ =&g\,\ell_\lambda \otimes g\,\ell_\lambda \end{aligned}$$

なので，$g\,\ell_\lambda \in \mathcal{S}$ が成り立つ．∎

これを用いて，KdV 方程式の N ソリトン解と呼ばれる解が，構成される．

なお，実は

$$\{\text{KdV 階層の解}\} = \mathcal{S} = G\,\ell_\lambda$$

が，大体成り立つ（歯切れが悪いのは無限和の問題とも関連している）．

以上の話は，いろいろなアフィン・リー代数に拡張できて，さまざまなタイプのソリトン型方程式系の研究が，アフィン・リー代数の表現論をもちいてなされる．実は，これに先行して，佐藤幹夫による $GL(\infty)$ を用いる KP 階層の研究があり，これをアフィン・リー代数の表現論の枠組みで展開したのが，伊達悦朗・神保道夫・柏原正樹・三輪哲二によるソリトン方程式の研究である (Date-Jimbo-Kashiwara-Miwa[6])．

5. ヴィラソロ代数とアフィン・リー代数

$\mathfrak{g}$ を有限型カルタン行列に対応する有限次元単純リー代数とする．$\mathfrak{g}$ の最高ルートを θ とし，

$$\theta^\vee = \frac{2\theta}{(\theta,\theta)}, \qquad g^* = (\theta^\vee, \rho) + 1 \tag{B.2}$$

とおく．ここで $(\ ,\ )$ は $\mathfrak{g}$ 上の標準不変形式 $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{K}$ から定まる標準形式，また ρ は $\mathfrak{g}$ の正ルートの和の半分である．κ を用いて，対応するアフィン・リー代数

$$\hat{\mathfrak{g}} = \big(\mathbf{K}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{K}} \mathfrak{g}\big) \oplus \mathbf{K}c \oplus \mathbf{K}d$$

を考える．$x \in \mathfrak{g}$ と $n \in \mathbf{Z}$ に対して $x(n) = t^n x \in \hat{\mathfrak{g}}$ とおく．

$k \in \mathbf{K}, k \neq -g^*$ を固定する．$\mathfrak{g}$ の 2 つの基底 $\{x_a\}_{a=1}^N$，$\{y_a\}_{a=1}^N$ であって，$\kappa(x_a, y_b) = \delta_{ab}$ を満たすものを 1 つ選び，$n \in \mathbf{Z}$ に対して

$$L(n) = \frac{1}{2(k+g^*)} \sum_{a=1}^N \sum_{j \in \mathbf{Z}, n+j \geqq -j} \epsilon_{j,n} x_a(-j) y_a(n+j)$$

とおく．ただし $n+j = -j$ のときは $\epsilon_{j,n} = 1$，$n+j > -j$ のときは $\epsilon_{j,n} = 2$ とする．これは無限和であるが，クラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群上の作用素としては意味をもつ．このとき，クラス $\mathcal{O}$ に属する $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群 M であって，$c|M = k\,\mathrm{id}_M$ を満たすものの上の作用素として，

$$[L(n), x(m)] = -mx(m+n),$$
$$[L(n), L(m)] = (n-m)L(n+m) + \delta_{n+m,0}\frac{n^3-n}{12}\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+g^*}$$

が成立することがわかる．特に M は自然にヴィラソロ代数 Vir の作用をもつ．このようにしてアフィン・リー代数の表現からヴィラソロ代数の表現が得られるのである．これを用いて，ヴィラソロ代数の表現の研究を行うことができる．詳しいことは，Kac-Raina[23] を参照されたい．

6. 共形場理論，KZ 方程式

2 次元共形場理論（conformal field theory）の研究は A. ベラヴィン・A. ポリヤコフ・A. ザモロドチコフに始まるが，彼らはヴィラソロ代数の対称性を用

いて理論を定式化し，頂点作用素およびそれから定まる N 点関数に関して，深い考察を行った．V. クニジュニク・ザモロドチコフは，さらにアフィン・リー代数のゲージ対称性を付加して理論を展開し（WZW 模型），特に N 点関数の満たす微分方程式（KZ 方程式）を求めた．これらは物理の論文であるが，土屋昭博・蟹江幸博は，アフィン・リー代数の可積分最高ウェイト表現を用いて複素射影直線 $\mathbf{P}^1$ 上での頂点作用素の理論を構成し，これによりクニジュニク・ザモロドチコフの理論に数学的な意味でも厳密な基礎づけを与えた．さらにより一般のリーマン面上での共形場理論も土屋・上野健爾・山田泰彦により構成されている．2 次元共形場理論は，その後も物理学・数学の双方でいろいろな分野に大きな影響を与えてきている．

この節では，土屋・蟹江による頂点作用素および KZ 方程式の理論（Tsuchiya-Kanie[47]）の一端を紹介する．

以下，基礎体 $\mathbf{K}$ が複素数体 $\mathbf{C}$ の場合を考える．$\mathfrak{g}$ を (X_ℓ) 型のカルタン行列に対応する有限次元単純リー代数，$\mathfrak{h}$ をそのカルタン部分代数，θ をその最高ルートとし，$\theta^\vee, g^*$ を (B.2) により定める．$e \in \mathfrak{g}_\theta \setminus \{0\}$ を 1 つ固定する．

$(\mathrm{X}_\ell^{(1)})$ 型のアフィン型カルタン行列を $A = (a_{ij})_{i,j\in\tilde{I}}$ とし（$\tilde{I} = \{0\} \sqcup I$），対応するアフィン・リー代数を $\hat{\mathfrak{g}}$ で表す．すなわち

$$\hat{\mathfrak{g}} = \big(\mathbf{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}\big) \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d$$

とする．$x \in \mathfrak{g}$ と $n \in \mathbf{Z}$ に対して $x(n) = t^n x \in \hat{\mathfrak{g}}$ とおく．

以下，非負整数 k を固定する．$\mathfrak{g}$ の優整ウェイト λ であって $(\theta^\vee, \lambda) \leqq k$ を満たすものの集合を P_k^+ で表す．また $\hat{\mathfrak{g}}$ の優整ウェイト μ であって $\mu(c) = k, \mu(d) = 0$ を満たすものの集合を $\tilde{P}_k^+$ で表す．P_k^+ は $\mathfrak{h}^*$ の有限部分集合である．また $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d$ とおくとき，$\tilde{P}_k^+$ は $\hat{\mathfrak{h}}^*$ の部分集合である．このとき，制限写像 $\hat{\mathfrak{h}}^* \to \mathfrak{h}^*$ は同型 $\tilde{P}_k^+ \cong P_k^+$ を導くことが容易にわかる．$\lambda \in P_k^+$ に対応する $\tilde{P}_k^+$ の元を $\hat{\lambda}$ で表す．混乱を避けるために，$\hat{\lambda} \in \tilde{P}_k^+$ を最高ウェイトとする $\hat{\mathfrak{g}}$ の既約最高ウェイト加群を $H(\lambda)$ で表し，$\lambda \in P_k^+$ を最高ウェイトとする $\mathfrak{g}$ の既約最高ウェイト加群を $V(\lambda)$ で表す．$V(\lambda)$ は有限次元，また $H(\lambda)$ は可積分な最高ウェイト加群である．$U(\mathfrak{g})$ 加群としての自然な埋め込み $V(\lambda) \subset H(\lambda)$ が最高ウェイト・ベクトルを最高ウェイトベクトルに対応させることにより得られる．$p \in \mathbf{Z}$ に対して $H_p(\lambda) = \{v \in H(\lambda) | dv = pv\}$ とおく

とき，

$$H(\lambda) = \bigoplus_{p \leqq 0} H_p(\lambda), \qquad H_0(\lambda) = V(\lambda)$$

が成り立つ．$H(\lambda)$ の完備化 $\overline{H}(\lambda)$ を $\overline{H}(\lambda) = \prod_{p \in \mathbf{Z}} H_p(\lambda)$ により定める．これも $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群である．$\lambda \in P_k^+$ に対して

$$\Gamma_\lambda = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k + g^*)}$$

とおく．

頂点作用素の定義を述べよう．$\lambda, \mu, \nu \in P_k^+$ とする．タイプ (λ, μ, ν) の頂点作用素とは，パラメータ $z \in \mathbf{C}^\times$ に依存する線形写像

$$\Phi(z) : V(\lambda) \otimes H(\mu) \to \overline{H}(\nu)$$

であって以下の条件 (V1), (V2) を満たすもののことをいう（以下 $u \in V(\lambda)$ に対して $H(\mu) \ni v \mapsto (\Phi(z))(u \otimes v) \in \overline{H}(\nu)$ を $\Phi(u; z)$ で表す）．

(V1)　$\Phi(u; z)$ は

$$\Phi(u; z) = z^{-\Gamma_\lambda - \Gamma_\mu + \Gamma_\nu} \sum_{n \in \mathbf{Z}} z^{-n} \Phi_n(u)$$

と展開されて，$\Phi_n(u)(H_p(\mu)) \subset H_{p+n}(\nu)$ が成立する．

(V2)　$[x(m), \Phi(u; z)] = z^m \Phi(xu; z)$.

わざわざ $z^{-\Gamma_\lambda - \Gamma_\mu + \Gamma_\nu}$ を前につけるのはそれなりに意味があるのだが，1 つの理由は後で述べる KZ 方程式の記述を簡単にするためである．

タイプ (λ, μ, ν) の頂点作用素のなすベクトル空間を $\mathrm{VO}(\lambda, \mu, \nu)$ で表す．$\Phi(z) \in \mathrm{VO}(\lambda, \mu, \nu)$ に対して，その初項 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V(\lambda) \otimes V(\mu), V(\nu))$ を $\varphi(u \otimes v) = (\Phi_0(u))(v)$ で定める．このとき次が成立する．

B.8 ［命題］　初項をとる操作は次の同型写像を導く：

$$\begin{aligned} &\mathrm{VO}(\lambda, \mu, \nu) \\ \cong &\{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda) \otimes V(\mu), V(\nu)) | \varphi(e^{k - (\mu, \theta^\vee) + 1} V(\lambda) \otimes V(\mu)_\mu) = \{0\}\}. \end{aligned}$$

特に $\mathrm{VO}(\lambda,\mu,\nu)$ は有限次元のベクトル空間である．

$x\in\mathfrak{g}$ と $z\in\mathbf{C}^\times$ に対して

$$x(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} z^{-n-1}x(n)$$

とおく．これは，$\lambda\in P_k^+$ に対する線形作用素 $x(z):H(\lambda)\to\overline{H}(\lambda)$ として意味をもつ．$x(z_1)$ と頂点作用素 $\Phi(u;z_2)$ の合成 $x(z_1)\Phi(u,z_2)$ を考えたいのだが，作用素の値域が $H(\lambda)$ をはみ出して $\overline{H}(\lambda)$ になっているので，無限和が収束するかどうかの問題がある．この問題を解決するために作用素積展開（OPE）の理論が必要となる．OPE は共形場理論における最も重要なテクニックの 1 つであるが，ここではその結果のみ述べる．$\Phi(z)\in\mathrm{VO}(\lambda,\mu,\nu), u\in V(\lambda), x\in\mathfrak{g}$ とする．このとき，合成 $x(z_1)\Phi(u,z_2):H(\mu)\to\overline{H}(\nu)$ は $|z_1|>|z_2|>0$ で収束する．また，$z_2^{\Gamma_\lambda+\Gamma_\mu-\Gamma_\nu}x(z_1)\Phi(u,z_2)$ は $(z_1,z_2)\in(\mathbf{C}^\times)^2$ に関する（一価の）有理型作用素に解析接続され，その極は超平面 $\{z_1=z_2\}$ の上にのみある．

これを用いると，頂点作用素 $\Phi(z):V(\lambda)\otimes H(\mu)\to\overline{H}(\nu)$ は，以下の条件を満たすように，自然に $\Phi(z):H(\lambda)\otimes H(\mu)\to\overline{H}(\nu)$ に拡張される[1]：

$$\Phi(x(n)v;z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C((\zeta-z)^n x(\zeta)\Phi(v;z))d\zeta \qquad (x\in\mathfrak{g}, v\in H(\lambda)).$$

ただし積分路 C は z の周りを時計と反対向きに 1 回転するものとする．

以下，頂点作用素の合成に関して考察する．$\lambda_1,\ldots,\lambda_N,\mu_0,\ldots,\mu_N\in P_k^+$ とし，$\Phi_i(z)\in\mathrm{VO}(\lambda_i,\mu_{i-1},\mu_i), v_i\in H(\lambda_i)$ $(1\leqq i\leqq N)$ に対して

$$\Phi_N(v_N;z_N)\cdots\Phi_1(v_1;z_1)$$

を考える．ただし，ここでも無限和の収束性の問題があるので慎重に考える必要がある．まず形式的ベキ級数としての意味づけを与える．$H(\mu_N)$ の双対加群 $H^*(\mu_N)$ を $H^*(\mu_N)=\bigoplus_{p\in\mathbf{Z}}(H_p(\mu_N))^*$ により定める．これは

$$av^*(v)=-v^*(av) \qquad (a\in\hat{\mathfrak{g}}^*, v^*\in H^*(\mu_N), v\in H(\mu_N))$$

により $U(\hat{\mathfrak{g}})$ 加群である．そこで，$v_0\in H(\mu_0), v_{N+1}\in H^*(\mu_N)$ に対して

$$\tilde{F}(v_{N+1}\otimes\cdots\otimes v_0;z_N,\ldots,z_1)=v_{N+1}(\Phi_N(v_N;z_N)\cdots\Phi_1(v_1;z_1)v_0)$$

[1] このことを nuclear democracy という：λ と μ は平等．

とおき，これを N 点関数と呼ぶ．これが形式的ベキ級数（あるいは解析関数）として意味づけられれば，$\Phi_N(v_N;z_N)\cdots\Phi_1(v_1;z_1)$ が形式的ベキ級数展開をもつ（あるいは，$z_1,\dots,z_N$ に関して解析的な）作用素として定まることになる．$\Phi_i(z)$ の展開式を用いて計算すると，$\tilde{F}$ は

$$\prod_{i=1}^{N} z_i^{-\Gamma_{\lambda_i}-\Gamma_{\mu_{i-1}}+\Gamma_{\mu_i}}\mathbf{C}((\frac{z_{N-1}}{z_N},\cdots,\frac{z_1}{z_2}))[z_N,z_N^{-1}]$$

に属する形式的ベキ級数として意味をもつことがわかる．また $v_0\in V(\mu_0), v_i\in V(\lambda_i)$ $(1\leqq i\leqq N), v_{N+1}\in V(\mu_N)^*$ に対する $\tilde{F}$ が決まれば，一般の場合の $\tilde{F}$ も帰納的に定まることがわかる．便宜上 $\lambda_0=\mu_0$ とおく．また $V(\mu_N)^*\cong V(\nu)$ なる ν を λ_{N+1} で表す．上に述べたことから，考えるべきなのは

$$(F(z_N,\dots,z_1))(u_{N+1}\otimes\cdots\otimes u_0)=u_{N+1}(\Phi_N(u_N;z_N)\cdots\Phi_1(u_1;z_1)u_0)$$
$$(u_i\in V(\lambda_i))$$

により定まる，$V(\lambda_{N+1})^*\otimes\cdots\otimes V(\lambda_0)^*$ に値をもつベキ級数 $F=F_{\Phi_N\otimes\cdots\otimes\Phi_1}$ である．実は F は

$$\begin{aligned}&(V(\lambda_{N+1})^*\otimes\cdots\otimes V(\lambda_0)^*)^{\mathfrak{g}}\\=&\{u\in V(\lambda_{N+1})^*\otimes\cdots\otimes V(\lambda_0)^*|xu=0\ (x\in\mathfrak{g})\}\end{aligned}$$

に値をもっていることも示される．

F の収束性を示すために，それの満たす微分方程式について考える．$0\leqq i\leqq N+1$ と $x\in\mathfrak{g}$ に対して $V(\lambda_{N+1})^*\otimes\cdots\otimes V(\lambda_0)^*$ の線形変換 $\pi_i(x)$ を

$$(\pi_i(x))(w_N\otimes\cdots\otimes w_0)=w_N\otimes\cdots\otimes xw_i\otimes\cdots\otimes w_0$$

により定める．また $\mathfrak{g}$ の基底 $\{x_a\}_a$ であって，標準不変形式 $\kappa:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbf{C}$ に関して $\kappa(x_a,x_b)=\delta_{ab}$ を満たすものを 1 つ選び，

$$\Omega_{ij}=\sum_a\pi_i(x_a)\pi_j(x_a)$$

とおく．このとき Ω_{ij} は $(V(\lambda_{N+1})^*\otimes\cdots\otimes V(\lambda_0)^*)^{\mathfrak{g}}$ を保つことが容易にわかる．クニジュニク・ザモロドチコフにより，上の F は次の KZ 方程式を満

たす．

$$\text{(KZ)} \qquad \frac{\partial F}{\partial z_i} = \frac{1}{k+g^*}\left(\frac{\Omega_{0i}}{z_i} + \sum_{1\leqq j\leqq N, j\neq i}\frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}\right)(F) \qquad (1 \leqq i \leqq N).$$

また土屋・蟹江により，F はさらに次の代数方程式を満たす．

$$\text{(Alg)}\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\mathbf{m}|=L_0}\binom{L_0}{\mathbf{m}}\prod_{j=1}^{N} z_j^{-m_j} F(u_{N+1}\otimes e^{m_N}u_N\otimes\cdots\otimes e^{m_1}u_1\otimes v_{\lambda_0}) = 0, \\ \displaystyle\sum_{|\mathbf{m}|=L_i}\binom{L_i}{\mathbf{m}} z_i^{-m_0}\prod_{j\neq i}(z_i - z_j)^{-m_j} F(u_{N+1}\otimes e^{m_N}u_N\otimes\cdots\otimes v_{\lambda_i} \\ \qquad\qquad\qquad \otimes\cdots\otimes e^{m_0}u_0) = 0 \quad (1\leqq i\leqq N). \end{cases}$$

ただし $L_i = k - (\lambda_i, \theta^\vee) + 1$ で v_{λ_i} は $V(\lambda_i)$ の最高ウェイト・ベクトルとする．また非負整数の列 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ であって $|\mathbf{n}| = \sum_j n_j = L$ を満たすものに対して

$$\binom{L}{\mathbf{n}} = \frac{L!}{n_1!\cdots n_r!}$$

とおく．

(KZ) および (Alg) は $\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}$ のみによっており，$\mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$ にはよらないことに注意されたい．(KZ) と (Alg) の両方を合わせた方程式系を (E) と書く．$\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}$ を指定したい場合には，これを $(\mathrm{E})_{\lambda_0,\ldots,\lambda_{N+1}}$ と記す．

$(\mathbf{C}^\times)^N$ の開集合 X_N, U_N を

$$\begin{aligned} X_N =& \{(z_N, \ldots, z_1) \in (\mathbf{C}^\times)^N | z_i \neq z_j \ (i \neq j)\}, \\ U_N =& \{(z_N, \ldots, z_1) \in X_N || z_N| > \cdots > |z_1|\} \end{aligned}$$

により定める．

(KZ) は完全積分可能な確定特異点型方程式系であることがわかり，これと命題 B.8 により次が従う．

B.9 [定理] (土屋・蟹江)　$\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1} \in P_k^+$ とする．$\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_N) \in (P_k^+)^{N+1}$ であって $\mu_0 = \lambda_0, V(\mu_N)^* \cong V(\lambda_{N+1})$ を満たすもののなす有限集合を $\mathbf{M}$ で表す．

(i) $\mu \in \mathbf{M}, \Phi_i(z) \in \mathrm{VO}(\lambda_i, \mu_{i-1}, \mu_i), v_i \in H(\lambda_i)$ $(1 \leqq i \leqq N)$ とする．このとき $\Phi_N(v_N; z_N) \cdots \Phi_1(v_1; z_1)$ は U_N において収束し，X_N 上の多価正則な作用素に解析接続される．

(ii) $(\mathrm{E})_{\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}}$ の局所解のなすベクトル空間を，$\mathrm{Sol}((\mathrm{E})_{\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}})$ とするとき，ベクトル空間の同型

$$\bigoplus_{\mu \in \mathbf{M}} \bigotimes_{i=1}^{N} \mathrm{VO}(\lambda_i, \mu_{i-1}, \mu_i) \cong \mathrm{Sol}((\mathrm{E})_{\lambda_0, \ldots, \lambda_{N+1}})$$

が $\Phi_N \otimes \cdots \otimes \Phi_1 \mapsto F_{\Phi_N \otimes \cdots \otimes \Phi_1}$ により定まる．

ここまで頂点作用素の合成について考察してきたが，今度は頂点作用素を別の頂点作用素に代入したものを考えよう．$\lambda_i, \mu \in P_k^+$ $(0 \leqq i \leqq 3)$ とし，$V(\nu)^* \cong V(\lambda_3)$ なる ν をとる．$\Phi_1(z) \in \mathrm{VO}(\mu, \lambda_0, \nu), \Phi_2(z) \in \mathrm{VO}(\lambda_2, \lambda_1, \mu)$ に対して

$$\Phi_1(\Phi_2(v_2; z_2 - z_1)v_1; z_1)$$

を考える．$\Phi_1(\Phi_2(v_2; z_2 - z_1)v_1; z_1)$ のベキ級数としての意味づけ，およびそれの満たす方程式を考えることにより，次が示される．

B.10 [定理] (土屋・蟹江)

(i) $\Phi_1(\Phi_2(v_2; z_2 - z_1)v_1; z_1)$ は

$$\{(z_2, z_1) \in (\mathbf{C}^\times)^2 \| z_1| > |z_2 - z_1| > 0\}$$

において収束し，X_2 上の多価正則な作用素に解析接続される．

(ii) ベクトル空間の同型

$$\bigoplus_{\mu \in P_k^+} \mathrm{VO}(\lambda_2, \lambda_1, \mu) \otimes \mathrm{VO}(\mu, \lambda_0, \nu) \cong \mathrm{Sol}((\mathrm{E})_{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3})$$

が

$$\Phi_2 \otimes \Phi_1 \mapsto G_{\Phi_2 \otimes \Phi_1},$$
$$(G_{\Phi_2 \otimes \Phi_1}(z_2, z_1))(u_3 \otimes u_2 \otimes u_1 \otimes u_0)$$
$$= u_3(\Phi_1(\Phi_2(u_2; z_2 - z_1)u_1; z_1)u_0)$$

により定まる.

以上, KZ 方程式を基礎とする土屋・蟹江の共形場理論の一端について解説したが, これ以外にも KZ 方程式のさまざまなヴァリエーションを考えることができて, 物理的にも数学的にも極めて興味深い結果が得られている. 特に解のモノドロミーの構造は, 量子群とも関連して表現論的に深い意味をもつことがわかってきている（河野俊丈, ドリンフェルトなど). ここでは, その詳細には触れることができないが, アフィン・リー代数のある種の表現とベキ根での量子群の表現の対応を与えるカジュダン・ルスティックによる重要な結果（Kazhdan-Lusztig[30]）において, KZ 型方程式が本質的な役割を演じたことを注意しておこう.

7. 量子群と R 行列

V を有限次元ベクトル空間とする. $V\otimes V$ の線形変換 $R(\varphi,\psi)$（ただし φ,ψ はパラメータ）に関する方程式：

$$\begin{aligned} &R^{12}(\varphi_1,\varphi_2)R^{13}(\varphi_1,\varphi_3)R^{23}(\varphi_2,\varphi_3)\\ &=R^{23}(\varphi_2,\varphi_3)R^{13}(\varphi_1,\varphi_3)R^{12}(\varphi_1,\varphi_2) \end{aligned} \tag{B.3}$$

をヤン・バクスター方程式といい, その解を R 行列という. ここで $R^{ij}(\varphi,\psi)$ は $V\otimes V\otimes V$ の線形変換であって, (i,j) 成分には $R(\varphi,\psi)$ により, また残りの成分には恒等的に作用するものとする. 例えば $R(\varphi,\psi)=\sum_k r_k\otimes r'_k$ ならば $R^{13}(\varphi,\psi)=\sum_k r_k\otimes 1\otimes r'_k$ とする.

B.11 [例]　V を 2 次元のベクトル空間, $\{e_1,e_2\}$ をその基底とし, $V\otimes V$ の線形変換は, 基底 $\{e_1\otimes e_1,e_1\otimes e_2,e_2\otimes e_1,e_2\otimes e_2\}$ を用いて行列表示することにする. このとき, 次の行列により定まる $V\otimes V$ の線形変換は, ともに R 行列である：

$$R(\varphi,\psi)=\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & q-q^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

$$R(\varphi,\psi)=\begin{pmatrix}\sin(\varphi-\psi+\alpha) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sin(\varphi-\psi) & \sin(\alpha) & 0\\ 0 & \sin(\alpha) & \sin(\varphi-\psi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi-\psi+\alpha)\end{pmatrix}$$

ここで，q,α は（φ,ψ とは別の）パラメータである．なお，2 番目の例では，3 角関数が出てきているので，基礎体 $\mathbf{K}$ は実数体あるいは複素数体としておく必要がある．　□

例 B.11 の最初の方の $R(\varphi,\psi)$ はパラメータ φ,ψ によらない．このような R 行列を，定数型 R 行列と呼ぶ．また，2 番目の $R(\varphi,\psi)$ は 3 角関数を用いて書けており，このような R 行列を 3 角関数型 R 行列と呼ぶ．その他にも，楕円関数を用いて書ける楕円関数型 R 行列などが見つかっている．

R 行列は，可解格子模型やリンクの不変量の研究などで重要な役割を果たす．これに関しては，例えば神保 [17] や村上 [40] を参照されたい．ここではそちらの方面の話題は割愛し，むしろホップ代数（特に量子群）の表現論の立場から，R 行列の意味とその具体的構成法について解説する．

H をホップ代数とする．H 加群 V_1,V_2 に関して，$V_1\otimes V_2$ は $H\otimes H$ 加群であるが，第 2 節でも述べたように，結合代数の準同型写像 $\Delta: H\to H\otimes H$ を用いて，これを H 加群と見なすことができる．Δ を明示するために，これを $(V_1\otimes V_2)_\Delta$ と書く．ここで重要なのは，$(V_1\otimes V_2)_\Delta\cong(V_2\otimes V_1)_\Delta$ とは限らないということである．実際，入れ替え写像

$$\tau: H\otimes H\to H\otimes H \qquad (h_1\otimes h_2\mapsto h_2\otimes h_1)$$

を用いて，$\Delta'=\tau\circ\Delta: H\to H\otimes H$ とおくと，これも結合代数の準同型写像なので，これにより H 加群 $(V_1\otimes V_2)_{\Delta'}$ を考えることができて，$(V_2\otimes V_1)_\Delta\cong(V_1\otimes V_2)_{\Delta'}$ が成り立っている．したがって H が余可換（すなわち $\Delta=\Delta'$）ならば，常に $(V_1\otimes V_2)_\Delta\cong(V_2\otimes V_1)_\Delta$ であるが，そうでなければ，テンソル積の順序の入れ替えができるとは限らない．

そこで，H が余可換でなくとも $(V_1\otimes V_2)_\Delta\cong(V_2\otimes V_1)_\Delta$ が成り立つための条件を考えてみよう．V_k に対応する H の表現を $\rho_k: H\to \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V_k)$ とするとき，

$$(V_1\otimes V_2)_\Delta\cong(V_2\otimes V_1)_\Delta$$

$$\iff (V_1 \otimes V_2)_\Delta \cong (V_1 \otimes V_2)_{\Delta'}$$

$\iff$ $R \in GL(V_1 \otimes V_2)$ が存在して

$$R \circ (\rho_1 \otimes \rho_2)(\Delta(h)) \circ R^{-1} = (\rho_1 \otimes \rho_2)(\Delta'(h)) \quad (h \in H).$$

したがって，もしも $H \otimes H$ の可逆元 $\mathcal{R}$ であって

$$\mathcal{R} \cdot \Delta(h) \cdot \mathcal{R}^{-1} = \Delta'(h) \qquad (h \in H) \tag{B.4}$$

を満たすものが存在すれば，上の条件を満たす $R \in GL(V_1 \otimes V_2)$ が $R = (\rho_1 \otimes \rho_2)(\mathcal{R})$ により定まり，H 加群の同型写像が

$$\tilde{R} = \tau \circ (\rho_1 \otimes \rho_2)(\mathcal{R}) : (V_1 \otimes V_2)_\Delta \to (V_2 \otimes V_1)_\Delta$$

で決まる（ただし $\tau : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ は入れ替え写像である）.

さて，$(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$ なので，$((V_1 \otimes V_2)_\Delta \otimes V_3)_\Delta = (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)_\Delta)_\Delta$ である．したがって，n 個の H 加群 $V_1, \ldots, V_n$ に対して，そのテンソル積 $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)_\Delta$ が H 加群として自然に定まる．いま (B.4) を満たす $\mathcal{R}$ があるとすると，隣り合った 2 個の成分の順序の入れ替えを繰り返し行うことにより，H 加群の同型写像

$$F : (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)_\Delta \to (V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(n)})_\Delta$$

が，任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して得られる．ただし，この F は，2 個の成分の順序の入れ替えをどのような順番で行うかによる．言い換えると，置換 σ を互換 $\sigma_i = (i\ i+1)$ の積で書く書き方（σ の表示）：

$$\sigma = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_r} \qquad (1 \leqq i_1, \ldots, i_r \leqq n-1)$$

に依存して F が定まっている．F を定める際に用いる σ の表示としては，r が最小になるもの（最短表示）をとるのが自然であるので，F が σ の最短表示によらずに定まるための条件を考えてみよう．任意の 2 つの最短表示は，次の 2 種類の操作を繰り返すことにより移り合う：

(a) $\sigma_i\sigma_j$ ($|i-j| \geqq 2$) を $\sigma_j\sigma_i$ で置き換える.

(b) $\sigma_i\sigma_{i\pm1}\sigma_i$ を $\sigma_{i\pm1}\sigma_i\sigma_{i\pm1}$ で置き換える.

(a) の操作では F は変わらないので，考えるべきは (b) の操作で F が変わらないための条件である．したがって問題は $n=3$ のときに帰着されて，次の図式の可換性が問題である：

$$\begin{array}{ccccc} V_1\otimes V_2\otimes V_3 & \xrightarrow{\tilde{R}\otimes 1} & V_2\otimes V_1\otimes V_3 & \xrightarrow{1\otimes\tilde{R}} & V_2\otimes V_3\otimes V_1 \\ {\scriptstyle 1\otimes\tilde{R}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{R}\otimes 1} \\ V_1\otimes V_3\otimes V_2 & \xrightarrow{\tilde{R}\otimes 1} & V_3\otimes V_1\otimes V_2 & \xrightarrow{1\otimes\tilde{R}} & V_3\otimes V_2\otimes V_1 \end{array}$$

これを $\mathcal{R}$ を用いて書き直すと，

$$(\rho_1\otimes\rho_2\otimes\rho_3)(\mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23})=(\rho_1\otimes\rho_2\otimes\rho_3)(\mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12})$$

となる（$\mathcal{R}^{ij}$ の意味は先ほどと同様）．したがって，F として自然なものが 1 つ定まるための条件として，H におけるヤン・バクスター方程式

$$\mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23}=\mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12} \tag{B.5}$$

が得られた．実は次が成立する．

B.12 ［補題］　$H\otimes H$ の可逆元 $\mathcal{R}$ が，(B.4) および，次の (B.6)，(B.7) のいずれか一方を満たすならば，(B.5) が成立する：

$$(\Delta\otimes 1)(\mathcal{R})=\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23}, \tag{B.6}$$

$$(1\otimes\Delta)(\mathcal{R})=\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}. \tag{B.7}$$

証明　(B.4) と (B.6) が成り立っているとすると，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23}&=\mathcal{R}^{12}\cdot(\Delta\otimes 1)(\mathcal{R})=\mathcal{R}^{12}\cdot(\Delta\otimes 1)(\mathcal{R})\cdot(\mathcal{R}^{12})^{-1}\cdot\mathcal{R}^{12}\\ &=(\Delta'\otimes 1)(\mathcal{R})\cdot\mathcal{R}^{12}=(\tau\otimes 1)(\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23})\cdot\mathcal{R}^{12}=\mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}\end{aligned}$$

となり，(B.5) が成立する．(B.4) と (B.7) が成り立っている場合も，全く同様である．■

B.13 ［定義］(ドリンフェルト)　H をホップ代数とする．$H\otimes H$ の可逆元 $\mathcal{R}$ が与えられていて，(B.4)，(B.6)，(B.7) が成立しているとき，H を準 3 角ホップ代数と呼ぶ．また $\mathcal{R}$ を普遍 R 行列と呼ぶ．

以上の議論から，次は明らかである．

B.14 ［命題］　H を準 3 角ホップ代数，$\mathcal{R}$ をその普遍 R 行列，$\rho : H \to \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(V)$ を H の有限次元表現とし，

$$R = (\rho \otimes \rho)(\mathcal{R}) \in GL(V \otimes V),$$

とおく．このとき，R は定数型 R 行列で，さらに $R : (V \otimes V)_{\Delta} \to (V \otimes V)_{\Delta'}$ は H 加群の同型写像を与える．

B.15 ［定理］(ドリンフェルト)　量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ は（適当に完備化するとき）準 3 角ホップ代数である．

実際，ドリンフェルトの量子 2 重構成法を用いて普遍 R 行列の記述が得られる．また，カルタン行列が有限型あるいはアフィン型の場合には，より具体的な記述も知られている．ただし，R 行列は無限和になるので，ある種の完備化を考えることが必要になるのだが，その詳細はここでは省略する．

カルタン行列が有限型の場合には，対応するリー代数および量子群の有限次元表現論は，第 3 章および第 5 章に述べたように完全に確立されており，命題 B.14 を用いて，定数型 R 行列が組織的に構成される．

以下，カルタン行列がアフィン型の場合を考える．例 5.3 で与えられた，$\tilde{B} = (b_{pp'})_{p,p' \in \tilde{J}}$ をカルタン行列とする整基本ルート・データ $\Psi_{\tilde{B}}$ を用いて，$\mathbf{F} = \mathbf{K}(q)$ 上のアフィン量子群

$$\begin{aligned} U_q(\hat{\mathfrak{g}}) =& \langle K^{\pm d},\, K_p^{\pm 1},\, E_p,\, F_p | p \in \tilde{J} \rangle \\ =& \langle K^{\pm d},\, K^{\pm c},\, E_0,\, F_0,\, K_p^{\pm 1},\, E_p,\, F_p | p \in J \rangle \end{aligned}$$

を考える．また $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の部分ホップ代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}}'),\, U_q(\mathfrak{g})$ を，

$$\begin{aligned} U_q(\hat{\mathfrak{g}}') =& \langle K^{\pm c},\, E_0,\, F_0,\, K_p^{\pm 1},\, E_p,\, F_p | p \in J \rangle, \\ U_q(\mathfrak{g}) =& \langle K_p^{\pm 1},\, E_p,\, F_p | p \in J \rangle \end{aligned}$$

により定める．$U_q(\mathfrak{g})$ は，有限型カルタン行列 $B = (b_{pp'})_{p,p' \in J}$ に対応する量子群である．

M を有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群とする．ただし M への $U_q(\mathfrak{g})$ の作用の $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ への拡張であって，K^c の作用が恒等的であるようなものが存在すると仮定する（対応することはリー代数のレベルでは常に可能だが，量子群の場合にはできない場合もある）．以下，このような拡張を 1 つ決めて，M を $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群と思う．このとき，$\mathbf{F}[x,x^{-1}]\otimes_{\mathbf{F}} M$ への $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の作用が，

$$
\begin{aligned}
&u\cdot(x^n\otimes m)=x^n\otimes um \qquad (u\in U_q(\mathfrak{g})),\\
&K^{\pm c}\cdot(x^n\otimes m)=x^n\otimes m, \qquad K^{\pm d}\cdot(x^n\otimes m)=x^n\otimes q^{\pm n}m,\\
&E_0\cdot(x^n\otimes m)=x^{n+1}\otimes E_0m, \qquad F_0\cdot(x^n\otimes m)=x^{n-1}\otimes F_0m
\end{aligned}
$$

により定まる．対応する表現を $\rho_x : U_q(\hat{\mathfrak{g}})\to \mathrm{End}_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}[x,x^{-1}]\otimes_{\mathbf{F}} M)$ で表す．$\mathbf{A}=\mathbf{F}[x,x^{-1},y,y^{-1}]$, $\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{F}[x,x^{-1},y,y^{-1}][[\frac{x}{y}]]$ とおく．$\mathcal{R}$ が無限和で書けることから，$\hat{R}(x,y)=(\rho_x\otimes\rho_y)(\mathcal{R})$ は

$$(\mathbf{F}[x,x^{-1}]\otimes_{\mathbf{F}} M)\otimes_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}[y,y^{-1}]\otimes_{\mathbf{F}} M)=\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M)$$

の完備化 $\hat{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M)$ の線形変換を定める．Δ および Δ' を用いて得られる $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ の $\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M)$ への 2 つの作用は $\mathbf{A}$ 線形なので，$\hat{\mathbf{A}}$ 線形な $\hat{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M)$ への作用に拡張されて，

$$\hat{R}(x,y):(\hat{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M))_{\Delta}\to(\hat{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M))_{\Delta'}$$

は $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群の同型写像になる．また $\mathcal{R}$ の構成法から，$\hat{R}(x,y)$ も $\hat{\mathbf{A}}$ 線形で，しかも $\hat{R}(x,y)(\mathbf{F}[[\frac{x}{y}]]\otimes_{\mathbf{F}} M)=\mathbf{F}[[\frac{x}{y}]]\otimes_{\mathbf{F}} M$ が成り立つ．よって，特殊化 $\hat{\mathbf{A}}\to\mathbf{F}((x))$ $(y\mapsto 1)$ を考えて，$\mathbf{F}((x))$ 線形な $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群の同型写像

$$\hat{R}(x):(\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M))_{\Delta}\to(\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M))_{\Delta'}$$

が定まり，$\hat{R}(x,y)=\hat{R}(\frac{x}{y})$ が成り立つ．

先ほど与えた $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の $\mathbf{F}[x,x^{-1}]\otimes_{\mathbf{F}} M$ への作用の $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ への制限は $\mathbf{F}[x,x^{-1}]$ 線形なので，$\mathbf{F}(x)$ まで係数拡大して，$\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} M$ は $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群になる．これを M^x と書く．また M への $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ の作用を $\mathbf{F}(x)$ 線形に拡張して，$\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} M$ を $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群と見たものを，M^1 と書く．このとき

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M))_{\Delta}\cong\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}(x)}(M^x\otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta},\\
&(\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}}(M\otimes M))_{\Delta'}\cong\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}(x)}(M^x\otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta'}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．$\hat{R}(x)$ は同型写像なので，2 つの $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群 $(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_\Delta$，$(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta'}$ は $\mathbf{F}((x))$ まで係数拡大すれば同型である．

実は，ある一定の条件の下で，$(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_\Delta$，$(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta'}$ はともに既約な $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群であることがわかる．以下，この既約性を仮定する．M の $U_q(\mathfrak{g})$ 加群としての最高ウェイト・ベクトルを m_0 とすると，$\hat{R}(x)$ は $\mathbf{F}((x))\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\mathfrak{g})$ 加群の同型写像なので，$\hat{R}(x)(m_0\otimes m_0) = f(x)m_0\otimes m_0$ $(f(x)\in \mathbf{F}((x))^\times)$ と書ける．仮定により

$$
\begin{aligned}
&f(x)^{-1}\hat{R}(x)(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)\\
=&f(x)^{-1}\hat{R}(x)(\Delta(\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}'))(m_0\otimes m_0))\\
=&\Delta'(\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}'))(m_0\otimes m_0)\\
=&M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1
\end{aligned}
$$

となるので，$f(x)^{-1}\hat{R}(x)$ は，$\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群の同型写像

$$R(x) : (M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_\Delta \mapsto (M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta'}$$

を導く．そこで，$R(x,y) = R(\frac{x}{y})$ とおくと，$\mathcal{R}^{12}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{23} = \mathcal{R}^{23}\mathcal{R}^{13}\mathcal{R}^{12}$ より

$$R^{12}(x,y)R^{13}(x,z)R^{23}(y,z) = R^{23}(y,z)R^{13}(x,z)R^{12}(x,y)$$

となり，x, y に関して有理的な R 行列 $R(x,y)$ が得られた．

以上をまとめて次を得る．

B.16 ［定理］　M を有限次元 $U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群であって，K^c の作用は恒等的で，$U_q(\mathfrak{g})$ 加群として既約なものとする．また，先ほど定めた $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群 M^x，M^1（これらは $\mathbf{F}(x)$ 加群としては，ともに $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} M$ と一致する）に関して，$(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_\Delta$，$(M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta'}$ はともに既約な $\mathbf{F}(x)\otimes_{\mathbf{F}} U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群であるとする．M の $U_q(\mathfrak{g})$ 加群としての最高ウェイト・ベクトルを m_0 とするとき，$U_q(\hat{\mathfrak{g}}')$ 加群の同型写像

$$R(x) : (M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_\Delta \to (M^x \otimes_{\mathbf{F}(x)} M^1)_{\Delta'}$$

であって，$R(x)(m_0\otimes m_0) = m_0\otimes m_0$ を満たすものがただ 1 つ存在する．また，$R(x,y) = R(x/y)$ とおくとき，

$$R^{12}(x,y)R^{13}(x,z)R^{23}(y,z) = R^{23}(y,z)R^{13}(x,z)R^{12}(x,y)$$

が成立する．

8. 結晶基底

量子群の表現において，パラメータ q が 0 に近づくときに興味深い振る舞いをするような特別な基底が存在する．これが，柏原による結晶基底（Kashiwara[24], [25]）である[2]．以下，これについて簡単に説明する．

V を，量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の可積分加群とする．各 $i \in I$ に対して $\mathbf{K}(q) \otimes_{\mathbf{K}(q_i)} U_{q_i}(\mathfrak{sl}_2)$ と同型な部分環 $U_q(\mathfrak{a}_i)$ が定まっていた（第 5 章 2 節）．また V は有限次元既約 $U_q(\mathfrak{a}_i)$ 加群の直和で，各既約成分は第 5 章 2 節における $V(n)$ と同型になるのであった．よって

$$\begin{aligned}
&V = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} U_p, \qquad U_p = \bigoplus_{m=0}^{n_p} \mathbf{K}(q) v_m^p, \\
&K_i v_m^p = q_i^{n_p - 2m} v_m^p, \qquad K_i^{-1} v_m^p = q_i^{-(n_p - 2m)} v_m^p, \\
&E_i v_m^p = [n_p - m + 1]_{q_i} v_{m-1}^p, \qquad F_i v_m^p = [m+1]_{q_i} v_{m+1}^p
\end{aligned}$$

と書ける（ただし $v_{-1}^p = v_{n_p+1}^p = 0$ とする）．そこで，V の線形変換 $\tilde{E}_i, \tilde{F}_i$ を，

$$\tilde{E}_i v_m^p = v_{m-1}^p, \qquad \tilde{F}_i v_m^p = v_{m+1}^p$$

により定める．これらは，既約分解 $V = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} U_p$ の取り方によらないことが，容易にわかる．この $\tilde{E}_i$，$\tilde{F}_i$ を柏原作用素と呼ぶ．

$\mathbf{K}(q)$ の部分環 $\mathbf{A}$ を

$$\mathbf{A} = \{ f \in \mathbf{K}(q) | f \text{ は } q = 0 \text{ で正則} \}$$

により定める．このとき $\mathbf{A}/q\mathbf{A} = \mathbf{K}$ である．

B.17［定義］　V を可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群とする．V の $\mathbf{A}$ 格子 $\mathcal{L}$ と $\mathbf{K}$ 加群 $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ の基底 $\mathcal{B}$ の組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ が以下の条件を満たすとき，これを V の結晶基底と呼ぶ．

---

[2]「$q = 0$ は，物理的には絶対温度が零度の場合に対応し，すべてのものが結晶化する」というのが，名前の由来らしい．

(a) V のウェイト空間分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ に関して，$\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L} \cap V_\lambda$ とおくとき，$\mathcal{L} = \bigoplus_\lambda \mathcal{L}_\lambda$ が成り立つ．特に $\mathcal{L}/q\mathcal{L} = \bigoplus_\lambda \mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda$ である．また，$\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda/q\mathcal{L}_\lambda)$ とおくとき，$\mathcal{B} = \bigsqcup_\lambda \mathcal{B}_\lambda$ が成り立つ

(b) 任意の $i \in I$ に関して，$\tilde{E}_i(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$, $\tilde{F}_i(\mathcal{L}) \subset \mathcal{L}$.

(c) (b) により，$\tilde{E}_i$, $\tilde{F}_i$ は $\mathcal{L}/q\mathcal{L}$ の線形変換を定めるが，これに関して，

$$\tilde{E}_i(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}, \qquad \tilde{F}_i(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}.$$

(d) $b, b' \in \mathcal{B}$ に対して，

$$\tilde{E}_i(b) = b' \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{F}_i(b') = b.$$

B.18 ［例］　$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合を考える．可積分な $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群は完全可約であり，任意の可積分既約 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群は，次の $V(n)$ と同型であった：

$$\begin{aligned} V(n) &= \bigoplus_{m=0}^{n} \mathbf{K}(q) v_m, \\ K v_m &= q^{n-2m} v_m, \qquad K^{-1} v_m = q^{-(n-2m)} v_m, \\ E v_m &= [n-m+1]_q v_{m-1}, \qquad F v_m = [m+1]_q v_{m+1}. \end{aligned}$$

そこで

$$\mathcal{L}(n) = \bigoplus_{m=0}^{n} \mathbf{A} v_m, \qquad \mathcal{B}(n) = \{v_m \bmod q\mathcal{L}(n) | 0 \leqq m \leqq n\}$$

とおくと，$(\mathcal{L}(n), \mathcal{B}(n))$ は $V(n)$ の結晶基底である．　□

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト加群 $L_q(\lambda)$ が可積分であるための必要十分条件は，λ が

$$P^+ = \{\mu \in \mathfrak{h}^* | \mu(h_i) \in \mathbf{Z}_{\geqq 0} \ (i \in I)\}$$

に属することであった．

B.19 [定理] (柏原)　$\lambda \in P^+$ とする．$L_q(\lambda)$ の結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ が

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{i_1,\ldots,i_r \in I} \mathbf{A}\tilde{F_{i_1}} \cdots \tilde{F_{i_r}} \ell_\lambda,$$

$$\mathcal{B}(\lambda) = \{\tilde{F_{i_1}} \cdots \tilde{F_{i_r}} \ell_\lambda \bmod q\mathcal{L}(\lambda) | i_1, \ldots, i_r \in I\} \setminus \{0\} \subset \mathcal{L}(\lambda)/q\mathcal{L}(\lambda)$$

により定まる．

結晶基底 $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ は $q=0$ における基底であるが，これを $L_q(\lambda)$ 自身の基底に持ち上げることができる[3]．これについてもごく簡単に触れておこう．q と q^{-1} の役割を入れ替えることにより，$q=\infty$ における結晶基底 $(\mathcal{L}^\infty(\lambda), \mathcal{B}^\infty(\lambda))$ も考えることができる．ただし

$$\overline{\mathbf{A}} = \{f \in \mathbf{K}(q) | f \text{ は } q^{-1} = 0 \text{ で正則 }\}$$

とおくとき，$\mathcal{L}^\infty(\lambda)$ は $L_q(\lambda)$ の $\overline{\mathbf{A}}$ 格子で，また $\mathcal{B}^\infty(\lambda)$ は $\mathcal{L}^\infty(\lambda)/q^{-1}\mathcal{L}^\infty(\lambda)$ の $\mathbf{K}$ 基底である．このとき，$L_q(\lambda)$ の基底であって $q=0$ では $\mathcal{B}(\lambda)$ に，また $q=\infty$ では $\mathcal{B}^\infty(\lambda)$ に一致するものが存在する（このことの正確な意味づけはここでは省略する）．これを大域結晶基底と呼ぶ．

結晶基底・大域結晶基底の理論は，可解格子模型の解析に重要な役割を演じたが，それ以外にも量子群・カッツ・ムーディ・リー代数の表現論のいろいろな側面でその重要性が認識されつつある．

なお，柏原が結晶基底・大域結晶基底を導入したのとほぼ同時期に，ルスティックは箙多様体の幾何を用いて標準基底と呼ばれるものを導入したが，実は標準基底と大域結晶基底は同一のものであることがわかっている (Lusztig[32], [33], [34])．大域結晶基底の定義は初等的であるが，標準基底の定義は偏屈層の理論を使う幾何的なものであり，ここで簡単に説明するのは無理である．標準基底の言葉を用いることの利点の１つとして，ある種の係数がコホモロジー群の次元として解釈できて，特に正値であることがわかるということもある．

[3] 絶対零度における結晶を，温度の入った世界に引き戻すという意味で，柏原は "melting the crystal" といっている．

9. 非可積分最高ウェイト加群

カッツ・ムーディ・リー代数の可積分な既約最高ウェイト加群の指標公式は，定理 4.23 により与えられる．そこで，可積分とは限らない一般の既約最高ウェイト加群 $L(\lambda)$ の指標がどうなるかが気になるであろう．有限次元単純リー代数の場合のこの問題の研究は，1960 年代から始まり 1980 年前後に最終的な解答が得られた．まずこれについて説明する．

W をワイル群とする．このとき，$\{T_w\}_{w\in W}$ を基底とする自由 $\mathbf{Z}[q,q^{-1}]$ 加群

$$H(W)=\bigoplus_{w\in W}\mathbf{Z}[q,q^{-1}]T_w$$

上の，$\mathbf{Z}[q,q^{-1}]$ 双線形でかつ結合的な積が，次により一意的に定まる：

$$T_{w_1}T_{w_2}=T_{w_1w_2}\qquad(\ell(w_1w_2)=\ell(w_1)+\ell(w_2)),\tag{B.8}$$

$$(T_{s_i}+T_1)(T_{s_i}-qT_1)=0\qquad(i\in I).\tag{B.9}$$

(B.8) により，T_1 は $H(W)$ の単位元になる．よって $H(W)$ は $\mathbf{Z}[q,q^{-1}]$ 上の結合代数になるが，これを岩堀ヘッケ代数と呼ぶ[4]．

$w,y\in W$ とする．w の最短表示 $w=s_{i_1}\cdots s_{i_r}$ と $(i_1,\ldots,i_r)$ の部分列 $(j_1,\ldots,j_k)$ が存在して $y=s_{j_1}\cdots s_{j_k}$ が成り立つときに，$y\leqq w$ と書く．これは W 上の半順序を定めることがわかる．

B.20 [定理] (カジュダン・ルスティック)　$w\in W$ とするとき，多項式の族 $\{P_{y,w}(q)\}_{y\leqq w}\subset\mathbf{Z}[q]$ であって，以下の条件を満たすものが一意的に存在する：

(a) $P_{w,w}(q)=1$.

(b) $y<w$ のとき $\deg P_{y,w}(q)\leqq\frac{\ell(w)-\ell(y)-1}{2}$.

(c) $\sum_{y\leqq w}P_{y,w}(q)T_y=q^{\ell(w)}\sum_{y\leqq w}P_{y,w}(q^{-1})T_{y^{-1}}^{-1}$.

この $P_{y,w}(q)$ をカジュダン・ルスティック多項式と呼ぶ．

---

[4] その本来の起源は，有限体上の簡約代数群の表現論にある．

B.21 [定理] (ブリリンスキー・柏原，ベイリンソン・バーンシュタイン)
$\mathfrak{g}$ を有限次元カッツ・ムーディ・リー代数，$\mathfrak{h}$ をそのカルタン部分代数，W をワイル群とする．

(i) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に関して，$(\lambda+\rho)(h_i) \in \mathbf{Z}_{>0}$ $(i \in I)$ が成り立つならば，任意の $w \in W$ に対して

$$\mathrm{ch}(M(w(\lambda+\rho)-\rho)) = \sum_{y \geqq w} P_{w,y}(1)\,\mathrm{ch}(L(y(\lambda+\rho)-\rho)).$$

(ii) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に関して，$(\lambda+\rho)(h_i) \in \mathbf{Z}_{<0}$ $(i \in I)$ が成り立つならば，任意の $w \in W$ に対して

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}(L(w(\lambda+\rho)-\rho))\\ &= \sum_{y \leqq w} (-1)^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(1)\,\mathrm{ch}(M(y(\lambda+\rho)-\rho)).\end{aligned}$$

この定理はカジュダン・ルスティックにより予想されていたものである．証明には，旗多様体上の D 加群が基本的役割を果たす．このあたりのことに関する基本的文献として，Kazhdan-Lusztig[29]，Brylinski-Kashiwara[2]，Beilinson-Bernstein[1] をあげておく．なお，一般の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に関する公式も知られているが，記述が多少面倒になるので，ここでは省略する．

次に問題になるのは，一般のカッツ・ムーディ・リー代数でどうなるかということであるが，定理 B.21 の (i) は対称化可能なカルタン行列に対応する一般のカッツ・ムーディ・リー代数について成立し，(ii) は任意のアフィン・リー代数で成立することがわかっている（柏原・谷崎，L. カシアン)．特にアフィン・リー代数の場合には，$(\lambda+\rho)(c) \neq 0$ を満たす任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して，$L(\lambda)$ の指標公式が得られている (最も一般的な結果は Kashiwara-Tanisaki[27] にある)．

以上述べたように，カジュダン・ルスティック多項式は，カッツ・ムーディ・リー代数の既約最高ウェイト加群の指標を記述するのに用いられるが，それだけでなく，パラメータ q を 1 のベキ根に特殊化するときの有限型量子群の既約表現や，正標数での簡約代数群の有理既約表現の指標を記述する際にも，アフィン・ワイル群のカジュダン・ルスティック多項式が用いられる．紙数が尽きてしまったので，この方面に関する解説記事として，柏原・谷崎 [26] をあげておく．

参考文献

[1] A. Beilinson, J. Bernstein: Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **292** (1981), 15–18.

[2] J.-L. Brylinski and M. Kashiwara: Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, *Invent. Math.*, **64** (1981), 387–410.

[3] N. Bourbaki: *Groupes et algèbres de Lie,* 1) Ch. 1 Herman, Paris 1960. 邦訳 ブルバキ:リー群とリー環 1, 東京図書, 1968. 2) Ch. 2, 3 Herman, Paris 1972. 邦訳 ブルバキ:リー群とリー環 2, 東京図書, 1973. 3) Ch. 4–6 Herman, Paris 1968. 邦訳 ブルバキ:リー群とリー環 3, 東京図書, 1970. 4) Ch. 7, 8 Herman, Paris 1975.

[4] V. Chari and A. Pressley: *A guide to quantum group,*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[5] C. Chevalley: *Theory of Lie groups,* Princeton University Press, 1946.

[6] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa: Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **18** (1982), 1077–1110.

[7] V. G. Drinfeld: Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **283** (1985), 1060–1064.

[8] I. Frenkel and V. Kac: Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, *Invent. Math.*, **62** (1980), 23–66.

[9] O. Gabber and V. Kac: On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **5** (1981), 185–189.

[10] 原田耕一郎: モンスター　群のひろがり, 岩波書店, 1999.

[11] J. Hong and S-J. Kang: *Introduction to Quantum Groups and Crystal Bases,* Graduate Studies in Mathematics 42, American Mathematical Society, 2002.

[12] J. Humphreys: *Introduction to Lie algebras and representation theory,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, 1972.

[13] 岩堀長慶: Lie 群論 I, II 岩波講座現代応用数学, 岩波書店, 1957.

[14] N. Jacobson: *Lie algebras*, Wiley Interscience,1962.

[15] J. Jantzen: *Lectures on quantum groups,* Graduate Studies in Mathematics, 6, American Mathematical Society, 1996.

[16] M. Jimbo: A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys*, **10**(1985), 63–69.

[17] 神保道夫: 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1990.

[18] A. Joseph: *Quantum groups and their primitive ideals,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 29, Springer-Verlag, 1995.

[19] V. Kac, D. Kazhdan, J. Lepowsky and R. Wilson: Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras, *Adv. in Math.*, **42** (1981), 83–112.

[20] V. Kac: Simple graded Lie algebras of finite growth, *Funct. Anal. Appl.*, **1** (1967), 328–329.

[21] V. Kac: Infinite-dimensional Lie algebras, and the Dedekind η-function, *Funct. Anal. Appl.*, **8** (1974), 68–70.

[22] V. Kac: Infinite dimensional Lie algebras (3rd ed.), Cambridge Univ. Press, 1990.

[23] V. Kac and A. Raina: *Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras,* Advanced Series in Mathematical Physics, 2., World Scientific, 1987.

[24] M. Kashiwara: Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras, *Comm. Math. Phys.*, **133** (1990), 249–260.

[25] M. Kashiwara: On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.*, **63** (1991), 465–516.

[26] 柏原正樹・谷崎俊之: Kazhdan-Lusztig 予想をめぐって, 数学, **47** (1995), 269–285.

[27] M. Kashiwara and T. Tanisaki: Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, 275–296, China High. Educ. Press, 2000.

[28] C. Kassel: *Quantum groups,* Graduate Texts in Mathematics, 155, Springer-Verlag, 1995.

[29] D. Kazhdan and G. Lusztig: Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.*, **53** (1979), 165–184.

[30] D. Kazhdan, G. Lusztig: Tensor structures arising from affine Lie algebras. I, II, III, IV, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993), 905–947, 949–1011, **7** (1994), 335–381, 383–453.

[31] S. Kumar: Demazure character formula in arbitrary Kac-Moody setting, *Invent. Math.*, **89** (1987), 95–423.

[32] G. Lusztig: Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.*, **3** (1990), 447–498.

[33] G. Lusztig: Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, II, *Common trends in mathematics and quantum field theories (Kyoto, 1990)*, Progr. Theoret. Phys. Suppl., **102** (1990), 175–201.

[34] G. Lusztig: *Introduction to quantum groups,* Progress in Mathematics, 110, Birkhäuser,1993.

[35] I. Macdonald: Affine root systems and Dedekind's η-function, *Invent. Math.*, **15** (1972), 91–143.

[36] O. Mathieu: *Formules de caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales,* Astérisque No. 159-160, 1988.

[37] 松島与三: リー環論, 共立出版, 1956.

[38] R. Moody: Lie algebras associated with generalized Cartan matrices., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 217–221.

[39] R. Moody and A. Pianzola: *Lie algebras with triangular decompositions,* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Interscience Publication, 1995.

[40] 村上順: 結び目と量子群, 朝倉書店, 2000.

[41] 大島利雄・小林俊行: Lie 群と Lie 環, 1, 2, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1999.

[42] 佐武一郎: リー群の話, 日本評論社, 1982.

[43] 佐武一郎: リー環の話, 日本評論社, 1987.

[44] 佐藤肇: リー代数入門, 裳華房, 2000.

[45] J. P. Serre: *Algèbres de Lie semi-simples complexes,* W. A. Benjamin, 1966. 英訳 Complex semisimple Lie algebras, Springer monographs in mathematics, Springer-Verlag, 1987.

[46] 杉浦光夫: リー群論, 共立出版, 2000.

[47] A. Tsuchiya, Y. Kanie: Vertex operators in conformal field theory on $\mathbf{P}^1$ and monodromy representations of braid group, *Conformal field theory and solvable lattice models (Kyoto, 1986)*, Adv. Stud. Pure Math., **16** (1988), 297–372.

[48] 脇本実: 無限次元 Lie 環, 岩波講座現代数学の展開, 岩波書店, 1999.

[49] R. Wilson: Euclidean Lie algebras are universal central extensions, *Lie algebras and related topics (New Brunswick, N.J., 1981)*, Springer Lecture Notes in Math., **933** (1982), 210–213.

索　引

著者紹介

たに さき とし ゆき
谷 崎 俊 之

1980年　東京大学大学院理学系研究科修士課程修了
現　在　大阪市立大学大学院理学研究科 教授
　　　　理学博士
著　書　「D加群と代数群」(シュプリンガー・フェアラーク東京，1995，共著)，
　　　　「環と体3」(岩波書店，1998)

共立叢書 現代数学の潮流
リー代数と量子群

2002年4月15日　初版1刷発行
2006年10月10日　初版3刷発行

著　者　谷 崎 俊 之
発行者　南 條 光 章
発行所　**共立出版株式会社**
　　　　東京都文京区小日向4-6-19
　　　　電話　東京(03)3947-2511番(代表)
　　　　郵便番号112-8700
　　　　振替口座00110-2-57035番
　　　　URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　加藤文明社
製　本　関山製本

検印廃止
NDC 411.6, 421.3
ISBN 4-320-01692-0